Università di Pavia - Facoltà di Ingegneria

Esame di Meccanica Razionale - *11 settembre 2008*

COGNOME **NOME**

La ***prova*** consta di **3** Quesiti a risposta chiusa e **2** Quesiti a risposta semiaperta; la durata della prova è di 2 ore e 30 minuti. ***Non è permesso*** consultare testi od appunti, al di fuori di quelli distribuiti dalla Commissione.
Per i quesiti a risposta chiusa, la ***risposta*** a ciascuno di essi va scelta *esclusivamente* tra quelle già date nel testo, annerendo *un solo* circoletto ◯. Una sola è la risposta corretta. Qualora sia data più di una risposta allo stesso quesito, nessuna sarà considerata valida. Per i quesiti a risposta semiaperta, lo studente dovrà indicare la risposta nello spazio sottostante la domanda. I ***punteggi*** per ciascun quesito sono dichiarati sul testo, nel seguente formato **{E,NE,A}** dove **E** è il punteggio assegnato in caso di risposta *Esatta*, **NE** quello in caso di risposta *Non Esatta* e **A** quello in caso di risposta *Assente*. L'esito finale della prova è determinato dalla somma *algebrica* dei punteggi parziali.

ESITO | | |

Ai sensi del D. Lgs. 30/06/2003, n. 196, si autorizza la pubblicazione online in chiaro dell'esito della prova.
FIRMA:

QUESITI A RISPOSTA CHIUSA

QC1. *Trovare le coordinate (x, z) del punto di intersezione del piano $y = 0$ con l'asse centrale del seguente sistema di vettori applicati:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y & \text{applicato in } P_1 - O \equiv (1,0,1), \\ \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{e}_y + 4\boldsymbol{e}_z & \text{applicato in } P_2 - O \equiv (0,2,2), \\ \boldsymbol{v}_3 = 3\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_z & \text{applicato in } P_3 - O \equiv (3,3,0). \end{cases}$$

{6,-1,0}

Soluzione

◯ $x = -\frac{19}{10}, z = \frac{4}{25}$ ◯ $x = \frac{7}{10}, z = -\frac{67}{25}$ ◯ $x = -\frac{19}{10}, z = \frac{8}{25}$
◯ $x = -\frac{11}{10}, z = -\frac{67}{25}$ ◯ $x = -\frac{19}{10}, z = -\frac{1}{25}$ ♠ $x = -\frac{19}{10}, z = -\frac{67}{25}$

QC2. *Dati i tensori:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{L} = 3\boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_y + 3\boldsymbol{e}_y \otimes \boldsymbol{e}_z \\ \boldsymbol{M} = 2\boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_z \otimes \boldsymbol{e}_x \end{cases}$$

ed il vettore $\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{e}_x + 3\boldsymbol{e}_y + \gamma\boldsymbol{e}_z$, per quale valore di γ si ha $(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{M})^2\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_x = 0$.

{6,-1,0}

Soluzione

◯ $\gamma = -\frac{3}{2}$ ♠ $\gamma = -\frac{14}{9}$ ◯ $\gamma = -\frac{5}{3}$ ◯ $\gamma = -\frac{4}{3}$ ◯ $\gamma = -\frac{20}{9}$ ◯ $\gamma = -\frac{9}{4}$

QC3. *Dato un sistema olonomo, scleronomo a due gradi di libertà, dette $(q_1, q_2) \in R^2$ le coordinate lagrangiane che ne individuano la configurazione ed m una massa caratteristica, quale tra le seguenti è una possibile espressione per l'energia cinetica del sistema.*

{6,-1,0}

Risposta

◯ $T = m(\dot{q}_1^4 + 4\dot{q}_2^2)$ ◯ $T = m(\dot{q}_1^2 - 4\dot{q}_2^2)$ ♠ $T = m[(1 + q_1^2)\dot{q}_1^2 + 4\dot{q}_2^2]$
◯ $T = m(\dot{q}_1^3 + 4\dot{q}_2^2)$ ◯ $T = m((1 - q_1^2)\dot{q}_1^2 + 4\dot{q}_2^2)$ ◯ Nessuna delle precedenti.

QUESITI A RISPOSTA SEMIAPERTA

QA1. *In un piano verticale, un semidisco omogeneo di massa $2m$ e raggio R ha un estremo del diametro incernierato ad un punto fisso O. Sul bordo del semidisco è libero di muoversi senza attrito un punto materiale P di massa m attratto verso O da una molla ideale di costante elastica $4mg/R$. Introdotte le coordinate generalizzate ϑ e φ indicate in Figura 1, rispondere alle seguenti domande:*

1. *Qual è il momento di inerzia del semidisco rispetto all'asse per O diretto come $\boldsymbol{e}_z := \boldsymbol{e}_x \wedge \boldsymbol{e}_y$?* **{3,0,0}**

---

2. *Qual è l'energia potenziale totale del sistema?* **{3,0,0}**

---

3. *Quanto valgono $\ddot{\vartheta}(0)$* **{2,0,0}** *e $\ddot{\varphi}(0)$* **{2,0,0}** *se le condizioni iniziali sono $\vartheta(0) = 0$, $\varphi(0) = \frac{\pi}{4}$, $\dot{\vartheta} = \dot{\varphi} = 0$?*

QA2. *In un piano verticale, un filo AC omogeneo di peso specifico $3p$ ha il tratto AB che sottende un angolo di ampiezza $\vartheta_0 < \frac{\pi}{2}$ a contatto senza attrito con un semidisco di raggio R, mentre il tratto BC è libero. In A e C sono applicate due forze orizzontali, $-2pR\boldsymbol{e}_x$ e $pR\boldsymbol{e}_x$, rispettivamente. Detto $\vartheta \in [0, \vartheta_0]$ l'angolo che la verticale forma con un raggio generico (Fig. 2) determinare, in condizioni di equilibrio,*

1. *la tensione in ogni punto di AB, in funzione di ϑ;* **{2,0,0}**

---

2. *la lunghezza del tratto libero BC in funzione di ϑ_0.* **{3,0,0}**

---

3. *il valore di $\cos\vartheta_0$;* **{3,0,0}**

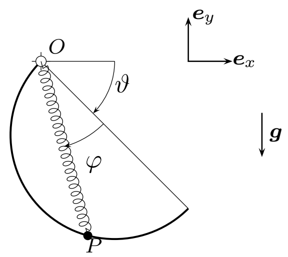

Fig. 1

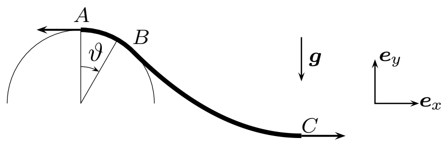

Fig. 2

QA1.1 $I_O = 3mR^2$

QA1.2 $V = -2mgR[\sin\vartheta + \frac{4}{3\pi}\cos\vartheta] + 8mgR\cos^2\varphi - 2mgR\cos\varphi\sin(\vartheta+\varphi)$

QA1.3 $\ddot{\vartheta}(0) = -\frac{1}{4}\frac{g}{R} \quad \ddot{\varphi}(0) = \frac{17}{8}\frac{g}{R}$

QA2.1 $\tau(\vartheta) = pR(3\cos\vartheta - 1)$

QA2.2 $\ell_{BC} = \frac{R}{3}\tan\vartheta_0$

QA2.3 $\cos\vartheta_0 = \frac{1+\sqrt{13}}{6}$