

COGNOME

NOME

La **prova** consta di **3** Quesiti a risposta chiusa e **2** Quesiti a risposta semiaperta; la durata della prova è di 2 ore e 30 minuti. **Non è permesso** consultare testi od appunti, al di fuori di quelli distribuiti dalla Commissione.

Per i quesiti a risposta chiusa, la **risposta** a ciascuno di essi va scelta *esclusivamente* tra quelle già date nel testo, annerendo *un solo* circoletto $\bigcirc$. Una sola è la risposta corretta. Qualora sia data più di una risposta allo stesso quesito, nessuna sarà considerata valida. Per i quesiti a risposta semiaperta, lo studente dovrà indicare la risposta nello spazio sottostante la domanda. I **punteggi** per ciascun quesito sono dichiarati sul testo, nel seguente formato **{E,NE,A}** dove **E** è il punteggio assegnato in caso di risposta *Esatta*, **NE** quello in caso di risposta *Non Esatta* e **A** quello in caso di risposta *Assente*. L'esito finale della prova è determinato dalla somma *algebrica* dei punteggi parziali.

ESITO

Ai sensi del D. Lgs. 30/06/2003, n. 196, si autorizza la pubblicazione online in chiaro dell'esito della prova.
 FIRMA:

QUESITI A RISPOSTA CHIUSA

QC1. Si consideri il seguente sistema di vettori applicati:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 = \alpha \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y - 2\mathbf{e}_z & \text{applicato in } P_1 - O \equiv (1, 0, 0), \\ \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z & \text{applicato in } P_2 - O \equiv (1, 0, 1), \\ \mathbf{v}_3 = -\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z & \text{applicato in } P_3 - O \equiv (0, 1, 1). \end{cases}$$

Calcolare per quale valore di α il trinomio invariante assume il valore 2

{6,-1,0}

Risposta

$\bigcirc \alpha = -\frac{5}{4}$ $\bigcirc \alpha = -\frac{9}{4}$ $\bigcirc \alpha = -\frac{6}{5}$ $\clubsuit \alpha = -\frac{5}{3}$ $\bigcirc \alpha = -\frac{3}{2}$ $\bigcirc \alpha = -5$

QC2. In una lamina omogenea circolare di massa $3m$, centro O e raggio $3R$ viene praticato un foro circolare di raggio R centrato nel punto O' posto a distanza $\frac{3}{2}R$ da O . Calcolare il momento di inerzia I_z del corpo così ottenuto per un asse passante per O parallelo ad $\mathbf{e}_z := \mathbf{e}_x \wedge \mathbf{e}_y$.

{6,-1,0}

Risposta

$\bigcirc \frac{137}{8}mR^2$ $\bigcirc \frac{247}{8}mR^2$ $\bigcirc \frac{197}{8}mR^2$ $\bigcirc \frac{485}{8}mR^2$ $\clubsuit \frac{151}{12}mR^2$ $\bigcirc \frac{205}{16}mR^2$

QC3. Le configurazioni di un sistema olonomo ad n gradi di libertà sono descritte dalle coordinate lagrangiane $\mathbf{q} := \{q_1, \dots, q_n\}$. Si supponga che il sistema di forze attive ammetta un'energia potenziale $V = V(\mathbf{q})$ e che i vincoli siano perfetti; si indichi con $T = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ l'energia cinetica del sistema, e con $L := T - V$ la funzione lagrangiana. Quale fra le seguenti espressioni è l'unica **sempre** corretta per l'equazione di Lagrange associata alla coordinata q_k ?

{6,-1,0}

Soluzione

$\bigcirc \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial V}{\partial q_k} = 0$ $\bigcirc \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) + \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$ $\bigcirc \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_k} = 0$
 $\clubsuit \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$ $\bigcirc \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$ $\bigcirc$ Nessuna delle precedenti

QUESITI A RISPOSTA SEMIAPERTA

QA1. In un piano verticale, una squadra a "T" viene composta saldando ad angolo retto un'asta AM omogenea di massa $2m$ e lunghezza 2ℓ nel punto medio M dell'asta BC omogenea di massa m e lunghezza ℓ . La squadra è libera di ruotare attorno al punto A , vincolato a scorrere senza attrito lungo una guida orizzontale. Una molla di lunghezza a riposo nulla e costante elastica $3mg/\ell$ attira A verso un punto fisso O della guida. Nelle risposte si utilizzino le coordinate lagrangiane x , ascissa di A misurata da O , e ϑ , angolo che AM forma con la verticale (vedi Figura 2).

QA1.1 Fornire l'espressione dell'energia potenziale totale del sistema. **{2,0,0}**

QA1.2 Fornire l'espressione dell'energia cinetica totale del sistema. **{3,0,0}**

QA1.3 Calcolare il momento della quantità di moto rispetto ad O per $x = \ell$, $\vartheta = \pi/6$, $\dot{x} = -\sqrt{3g\ell}$, $\dot{\vartheta} = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$. **{4,0,0}**

QA2. La struttura rigida riportata in Figura 3 è composta da due aste: AMC sagomata a "L", con bracci AM ed MC di lunghezza ℓ e massa $2m$ ciascuno, e BC di lunghezza $\ell\sqrt{2}$ e massa m , incernierata in C alla prima. La struttura è vincolata a terra da due cerniere in A e B , poste alla stessa quota a distanza 2ℓ . I punti C ed M sono posti alla stessa quota, al di sopra di AB , ed in M agisce una forza $\mathbf{f} = 2mg\mathbf{e}_x$.

QA2.1 Calcolare il modulo dell'azione assiale in C per l'asta BC **{3,0,0}**

QA2.2 Sia Φ la reazione vincolare in A ; calcolare $\Phi_x = \Phi \cdot \mathbf{e}_x$ **{2,0,0}** e $\Phi_y = \Phi \cdot \mathbf{e}_y$ **{1,0,0}**

QA2.3 Determinare il modulo del momento flettente in M . **{3,0,0}**

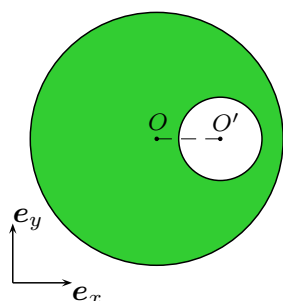


Fig. 1

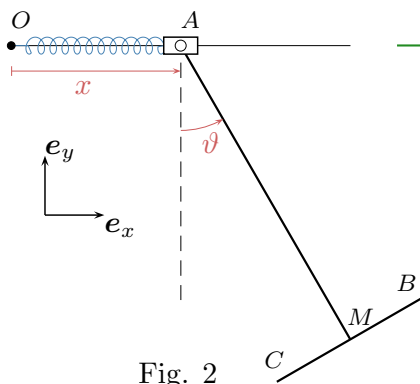


Fig. 2

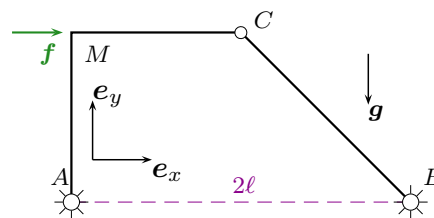


Fig. 3

QA1.1 $V = \frac{3}{2} \frac{mg}{\ell} x^2 - 4mg\ell \cos \vartheta$

QA1.2 $T = \frac{27}{8} m \ell^2 \dot{\vartheta}^2 + \frac{3}{2} m \dot{x}^2 + 4m\ell \dot{x} \dot{\vartheta} \cos \vartheta$

QA1.3 $K_O^{(z)} = \frac{11}{4} m \ell \sqrt{g\ell}$

QA2.1 $N = \frac{3\sqrt{2}}{2} mg$

QA2.2 $\Phi_A = (-\frac{1}{4} \mathbf{e}_x + \frac{11}{4} \mathbf{e}_y) mg$

QA2.3 $M_f = \frac{1}{4} mg\ell$