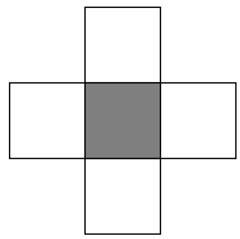
Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Esame di Meccanica Razionale
Appello del 15 aprile 2004
Soluzioni (Parte I)

Q1. *In un piano sono collocate* 5 *lamine quadrate di ugual lato* ℓ*, disposte come in Figura. La lamina centrale (in grigio nella Figura) ha massa* $2m$ *mentre le altre quattro lamine hanno ugual massa* $4m$*. Calcolare la traccia del tensore centrale di inerzia del sistema materiale.*



Se $\boldsymbol{e}_z$ indica la normale al piano in cui giace il sistema materiale, abbiamo $\mathrm{tr}\mathbb{I}_C = 2I_C^z$, dove I_C^z è il momento centrale di inerzia lungo $\boldsymbol{e}_z$. Per calcolare I_C^z osserviamo che il centro di massa C del sistema, coincidente con quello della lamina centrale, giace alla stessa distanza ℓ dai centri di massa C_i, $i = 1, ..., 4$, delle quattro lamine periferiche. Pertanto, grazie al teorema di Huygens-Steiner abbiamo

$$I_C^z = I_C^z(\mathcal{Q}_c) + 4I_C^z(\mathcal{Q}_p) = I_C^z(\mathcal{Q}_c) + 4[I_{C_i}^z(\mathcal{Q}_p) + 4m\ell^2]\,,$$

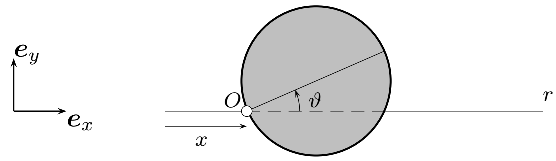
Dove $I_C^z(\mathcal{Q}_c)$ ed $I_C^z(\mathcal{Q}_p)$ sono i tensori di inerzia rispetto a C della lamina centrale e di quelle periferiche ed $I_{C_i}^z(\mathcal{Q}_p)$ è il tensore di inerzia della i-esima lamina periferica, rispetto al proprio centro di massa C_i. Servendosi delle tabelle per i tensori di inerzia ricaviamo

$$I_C^z = 38m\ell^2\,.$$

Q2. *In un piano, un disco omogeneo di massa* $3m$ *e raggio* $2R$ *è libero di ruotare attorno ad un punto* O *della sua circonferenza, a sua volta libero di traslare su una guida* r*. Usando le coordinate* x *e* ϑ *indicate in Figura, trovare il momento della quantità di moto del disco rispetto al punto* O*.*

Siano $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y\}$ i consueti versori ortonormali nel piano della figura, con $\boldsymbol{e}_x$ orientato nel verso dell'ascissa x. Dal teorema del trasporto abbiamo

$$\boldsymbol{K}_O = \boldsymbol{K}_C + (C - O) \wedge \boldsymbol{Q}\,,$$



Dove $\boldsymbol{K}_O$ e $\boldsymbol{K}_C$ sono i momenti della quantità di moto $\boldsymbol{Q}$ rispetto ad O ed al centro di massa C del disco. Poiché

$$C - O = 2R(\cos\vartheta \boldsymbol{e}_x + \sin\vartheta \boldsymbol{e}_y)\,,$$

$$\boldsymbol{v}_C = (\dot{x} - 2R\dot{\vartheta}\sin\vartheta)\boldsymbol{e}_x + 2R\dot{\vartheta}\cos\vartheta \boldsymbol{e}_y$$

e

$$\boldsymbol{K}_C = \mathbb{I}_C \boldsymbol{\omega} = 6mR^2\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z$$

abbiamo, svolti alcuni calcoli,

$$\boldsymbol{K}_O = 6mR[3R\dot{\vartheta} - \dot{x}\sin\vartheta]\,.$$

Q3. *Si consideri un sistema materiale $\mathcal{B}$ ed un punto O dello spazio euclideo. Detti $\boldsymbol{Q}$ e $\boldsymbol{K}_O$ la quantità di moto di $\mathcal{B}$ ed il momento della quantità di moto di $\mathcal{B}$ rispetto ad O, quale delle seguenti affermazioni è sempre corretta.*

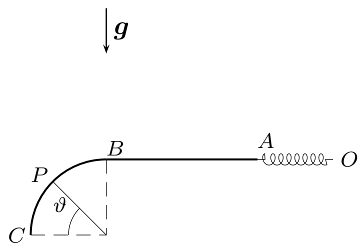
◯ $\boldsymbol{K}_O \wedge \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{0}$ ◯ $\boldsymbol{K}_O \cdot \boldsymbol{Q} = 0$ ◯ $\boldsymbol{K}_O \cdot \boldsymbol{Q}$ è indipendente dal punto O.
◯ $\boldsymbol{K}_O$ è una costante del moto. ◯ $\boldsymbol{Q}$ è una costante del moto.
◯ $\boldsymbol{K}_O \cdot \boldsymbol{Q} = 1$. ◯ $\boldsymbol{Q} \wedge \boldsymbol{K}_O$ è una costante del moto.
◯ Nessuna delle precedenti.

La risposta corretta è che $\boldsymbol{K}_O \cdot \boldsymbol{Q}$ non dipende dalla scelta del polo O, come si vede applicando il teorema del trasporto

$$\boldsymbol{K}_O = \boldsymbol{K}_P + (P - O) \wedge \boldsymbol{Q}\,,$$

dove P è un altro punto arbitrario dello spazio euclideo. Moltiplicando scalarmente questa equazione per $\boldsymbol{Q}$ vediamo che $\boldsymbol{K}_O \cdot \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{K}_P \cdot \boldsymbol{Q}$, per cui il prodotto scalare $\boldsymbol{K}_O \cdot \boldsymbol{Q}$ non dipende dal polo scelto.

Q4. *In un piano verticale, un filo omogeneo ABC di peso specifico $6p$ e lunghezza $2\pi R$ ha il tratto CB appoggiato su un quadrante di raggio R privo di attrito e il tratto BA appoggiato su un segmento orizzontale caratterizzato da un coefficiente di attrito statico μ. L'estremo C del filo è libero, mentre*



l'estremo A è attratto da una molla di costante elastica $4p$ e lunghezza a riposo nulla verso un punto O posto alla stessa quota di A, a distanza $2R$ da esso. Trovare il minimo valore di μ compatibile con l'equilibrio del filo nelle condizioni descritte.

Consideriamo dapprima il tratto circolare CB ed esprimiamo la tensione del filo nel generico punto P in funzione dell'angolo ϑ indicato in figura. Poiché non c'è attrito lungo CB e la sola forza attiva è il peso che ha energia potenziale specifica $v(P) = 6py(P)$, con $y(P)$ quota di P rispetto all'orizzontale per C, abbiamo

$$\tau(P) = 6py(P) + c = 6pR\sin\vartheta + c\,,$$

dove c è una costante che si determina osservando che nel punto C, dove $\vartheta = 0$, la tensione è nulla: dunque $c = 0$ e

$$\tau = 6pR\sin\vartheta\,.$$

In particolare, il modulo della tensione nel punto B, dove $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, è $\tau(B) = 6pR$. Per quanto riguarda il tratto orizzontale di lunghezza $\ell' = 2\pi R - \frac{\pi}{2}R = \frac{3\pi}{2}R$ occorre considerare l'attrito e la condizione di equilibrio è

$$|\phi_t| \le \mu|\phi_n|\,,$$

dove ϕ_t e ϕ_n sono le componenti della reazione vincolare specifica lungo il filo e lungo la sua normale principale. Poiché la curvatura di un segmento di retta è nulla, dalle equazioni di equilibrio indefinite ricaviamo

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}x} + \phi_t = 0 \\ \phi_n + f_n = 0 \end{cases}$$

dove x è l'ascissa contata partendo da B ed f_n è la componente del peso specifico nella direzione normale al filo. Abbiamo anche osservato che il peso specifico ha componente nulla lungo la tangente al filo, per cui $f_t = 0$. Abbiamo pertanto

$$|\phi_t| = \left|\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}x}\right|\,,$$

$$|\phi_n| = |f_n| = 6p$$

e la condizione di equilibrio si traduce nella disequazione

$$-6\mu p \le \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}x} \le 6\mu p$$

che, integrata da B ad A, diventa

$$-9\pi\mu p \leq \tau(A) - \tau(B) \leq 9\pi\mu p\,,$$

dove abbiamo notato che la lunghezza di AB è $\ell' = \frac{3\pi}{2}$. Per concludere, osserviamo che all'estremo A la tensione del filo è uguale alla forza elastica concentrata in A, cioè $\tau(A) = 8pr$. Ricordando il valore di $\tau(C)$, vediamo che l'unica condizione di equilibrio significativa impone

$$\mu \geq \frac{2}{9\pi}\,.$$