Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Esame di Meccanica Razionale
Appello del 15 aprile 2004
Soluzioni: parte II

Q1. *Trovare la posizione del centro c del cerchio osculatore alla curva*

$$p(t) - O = (e^{2t} - 1)\boldsymbol{e}_x + (\cos t - 1)\,\boldsymbol{e}_y + \sin^2 2t\,\boldsymbol{e}_z \qquad\qquad t \in [0, \pi]$$

nel punto corrispondente a $t = 0$.

Per risolvere il quesito, occorre conoscere la curvatura $\kappa(t)$ ed il versore normale $\boldsymbol{n}$ nel punto; si ha, infatti:

$$c(0) - O = p(0) - O + \frac{\boldsymbol{n}(0)}{\kappa(0)}\,; \tag{1}$$

$\kappa(t)$ è data dalla formula

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{p}(t) \wedge \ddot{p}(t)|}{|\dot{p}(t)|^3}\,. \tag{2}$$

Calcoliamo le derivate:

$$\dot{p}(t) = 2e^{2t}\boldsymbol{e}_x - \sin t\boldsymbol{e}_y + 2\sin 4t\boldsymbol{e}_z \tag{3a}$$
$$\ddot{p}(t) = 4e^{2t}\boldsymbol{e}_x - \cos t\boldsymbol{e}_y + 8\cos 4t\boldsymbol{e}_z\,, \tag{3b}$$

che, nel punto $t = 0$ assumono i valori

$$\dot{p}(0) = 2\boldsymbol{e}_x \tag{4a}$$
$$\ddot{p}(0) = 4\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y + 8\boldsymbol{e}_z\,, \tag{4b}$$

e si ha:

$$\dot{p}(0) \wedge \ddot{p}(0) = 2(-8\boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_z)\,. \tag{5}$$

Sostituendo le (4) e la (5) in (2) otteniamo

$$\frac{\sqrt{65}}{4}\,. \tag{6}$$

Inoltre, possiamo determinare immediatamente il versore binormale $\boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{b} = \frac{\dot{p}(0) \wedge \ddot{p}(0)}{|\dot{p}(0) \wedge \ddot{p}(0)|} = -\frac{8\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z}{\sqrt{65}}\,, \tag{7}$$

da cui ricaviamo immedaitamente il versore normale $\boldsymbol{n}$:

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{t} = \frac{-\boldsymbol{e}_y + 8\boldsymbol{e}_z}{\sqrt{65}}\,, \tag{8}$$

Sostituendo le (6) e (8) nella (1) abbiamo, alla fine:

$$c(0) - O = \frac{4}{65}(-\boldsymbol{e}_y + 8\boldsymbol{e}_z)\,. \tag{9}$$

Q2. *Sia* $\mathbf{T}$ *un tensore tale che*

$$\begin{cases} \mathbf{T}\boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_z \\ \mathbf{T}\boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_y + 2\boldsymbol{e}_x \\ \mathbf{T}\boldsymbol{e}_z = 3\boldsymbol{e}_y + 2\boldsymbol{e}_z\,, \end{cases}$$

Calcolare $\mathbf{T}^2(\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_z)$.

Poiché un tensore è un'applicazione lineare, conoscendo come agisce sulla base $\{\boldsymbol{e}_x\,, \boldsymbol{e}_y\,, \boldsymbol{e}_z\}$, possiamo calcolare prima $\mathbf{T}(\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_z)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_z) &= \mathbf{T}\,\boldsymbol{e}_x + \mathbf{T}\,\boldsymbol{e}_z \\ &= \boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_z + 3\boldsymbol{e}_y + 2\boldsymbol{e}_z \\ &= 4\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z\,; \end{aligned} \tag{10}$$

ora possiamo applicare una seconda volta $\mathbf{T}$ all'ultimo termine della (10), e abbiamo la quantitá richiesta:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^2(\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_z) &= \mathbf{T}(4\boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_z) \\ &= 4(\boldsymbol{e}_y + 2\boldsymbol{e}_x) + (3\boldsymbol{e}_y + 2\boldsymbol{e}_z) \\ &= 8\boldsymbol{e}_x + 7\boldsymbol{e}_y + 2\boldsymbol{e}_z\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Alternativamente, si potrebbe rappresentare i tensori in forma matriciale, eseguire i prodotti fra matrici e vettori, e ritornare alla forma diadica dopo avere eseguito il calcolo.

Q3. *La struttura rigida riportata in Figura 2 è posta in un piano verticale ed è composta da tre aste omogenee rettilinee di massa trascurabile. L'asta verticale* OA *di lunghezza* ℓ *è incernierata a terra in* O*; l'asta* AB*, di lunghezza* 2ℓ*, è vincolata a terra da un carrello verticale posto in* B*, alla stessa quota di* O*, ed è incernierata alla prima asta in* A*; infine, l'asta* BC*, di lunghezza* ℓ*, ha gli estremi incernierati in* B *e in un punto* C *fisso a terra, posto sulla verticale per* B*. Su* BC *agisce una coppia di momento* $\boldsymbol{M} = -2mg\ell\boldsymbol{e}_z$*; sull'asta* AB *agisce un carico distribuito con densità lineare* $\boldsymbol{f}(P) = -3\frac{mg}{\ell^2}s\boldsymbol{e}_y$*, dove* s *è la distanza di* P *da* B*. Determinare la reazione* $\boldsymbol{\Phi}_C$ *esercitata sulla struttura in* C*.*

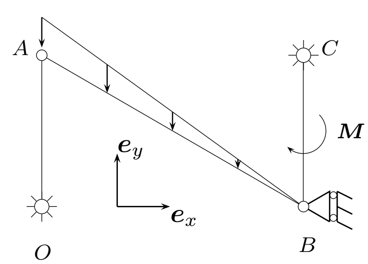

Fig. 2

Cominciamo eliminando l'asta AO, che è scarica e vincolata agli estremi da cerniere: la sua azione su resto della struttura sarà, pertanto, diretta lungo la congiungente gli estremi:

$$\boldsymbol{\Phi}_{AO} = N\boldsymbol{e}_y\,; \tag{12}$$

il carico distribuito su AB è equivalente ad una forza

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= -\boldsymbol{e}_y \int_0^{2\ell} 3\frac{mg}{\ell^2} s\, ds \\
&= -6mg\ell \boldsymbol{e}_y = -F\boldsymbol{e}_y\,;
\end{aligned}
\tag{13}
$$

il punto di applicazione della forza $\boldsymbol{F}$ può essere collocato sull'asta ad una distanza da B pari a $2/3$ della lunghezza di AB, affinché il suo momento sia equivalente a quello del carico distribuito. Imponendo l'equilibrio del momento M_B^{AB} calcolato in B delle forze agenti sull'asta AB, otteniamo:

$$
N\,\cancel{2}\ell\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = 6mg\frac{2}{3}\cancel{2}\ell\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\,,
\tag{14}
$$

da cui

$$
N = 4mg,\,.
\tag{15}
$$

Considerando che la reazione vincolare che il carrello in B esercita sulla struttura è della forma $\boldsymbol{\Phi}_B = \Phi_B\boldsymbol{e}_x$, se imponiamo l'equilibrio del momento M_A^{ABC} calcolato in A delle forze agenti sulle aste AB e BC abbiamo:

$$
\Phi_B\ell - 2mg\ell = 0\,,
\tag{16}
$$

da cui otteniamo, immediatamente

$$
\Phi_B = 2mg\,.
\tag{17}
$$

La reazione vincolare $\boldsymbol{\Phi}_C$ in C si ottiene ora scrivendo la prima equazione cardinale per le due aste AB e BC:

$$
N\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{F} + \boldsymbol{\Phi}_B + \boldsymbol{\Phi}_C = \boldsymbol{0}\,,
\tag{18}
$$

da cui:

$$
\boldsymbol{\Phi}_C = mg(-2\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y)\,.
\tag{19}
$$

Q4. *In un piano verticale, un'asta OA omogenea di lunghezza 3ℓ e massa m ha l'estremo O vincolato a ruotare attorno ad un punto fisso; un anellino P di dimensioni trascurabili e massa m è libero di scorrere lungo l'asta, e viene attirato verso O da una molla di lunghezza a riposo nulla e costante elastica $3\frac{mg}{\ell}$ (vedi Figura 1). Calcolare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno alla configurazione di equilibrio con l'asta verticale, con A sotto O*

Indichiamo con ϑ l'angolo che l'asta forma con la semiretta verticale passante per O, contato positivo in senso antiorario; sia, invece, s l'ascissa di P lungo l'asta, misurata a partire da O.

L'energia cinetica risulta essere:

$$
T = \frac{3}{2}m\ell^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{s}^2 + s^2\dot{\vartheta}^2)\,,
\tag{20}
$$

mentre per l'energia potenziale abbiamo:

$$
V = -mg\left(\frac{3}{2}\ell + s\right)\cos\vartheta + \frac{3mg}{2\ell}s^2\,.
\tag{21}
$$

Le configurazioni di equilibrio si trovano annullando il gradiente di $V(\vartheta, s)$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial\vartheta} &= mg\sin\vartheta\left(\frac{3}{2}\ell + s\right) = 0 \\
\frac{\partial V}{\partial s} &= \frac{3mg}{\ell}s - mg\cos\vartheta = 0\,;
\end{aligned}
\tag{22}
$$

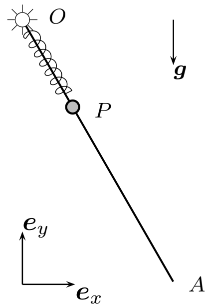

Fig. 1

ponendo $\vartheta = \vartheta_{eq} = 0$ nelle (22), otteniamo che, nella configurazione di equilibrio descritta dal testo, la s assume il valore s_{eq} dato da:

$$s_{eq} = \frac{1}{3}\ell\,.$$

Per trovare le pulsazioni dei modi normali, dobbiamo procedere alla diagonalizzazione simultanea delle forme quadratiche associate alle matrici A e B i cui elementi sono così definiti, rispettivamente:

$$A_{ij} = \left.\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right|_{q=q_0} \tag{23a}$$

$$B_{ij} = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right|_{q=q_0} \tag{23b}$$

dove, per brevità, abbiamo posto $q := (q_1, q_2) := (\vartheta, s)$; otteniamo, inserendo i valori di ϑ_{eq} e s_{eq}:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{28}{9}m\ell^2 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{11}{6}mg & 0 \\ 0 & 3\frac{mg}{\ell} \end{pmatrix} \tag{24}$$

anzitutto, notiamo che la matrice hessiana dell'energia potenziale (23b) è definita positiva, e questo permette subito di affermare che la configurazione di equilibrio trovata è effettivamente stabile.

Le due frequenze (pulsazioni) ω_1 e ω_2 delle piccole oscillazioni attorno alla posizione si trovano immediatamente, poiché entrambe le matrici (24) sono già diagonali: si avrà, pertanto:

$$\omega_1^2 = \frac{B_{11}}{A_{11}} \qquad \text{e} \qquad \omega_2^2 = \frac{B_{22}}{A_{22}}\,, \tag{25}$$

ossia:

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{33}{14}\frac{g}{\ell}}\,, \sqrt{\frac{3g}{\ell}}\,. \tag{26}$$