Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Esame di Meccanica Razionale
Appello del 17 luglio 2003
Soluzioni (Parte I)

Q1. *Trovare la torsione della curva*

$$p(t) - O = 6t\boldsymbol{e}_x + 3(t^2-1)\boldsymbol{e}_y + 4(t^3-1)\boldsymbol{e}_z$$

nel punto corrispondente ad $t = 0$.

La torsione τ si calcola tramite la formula

$$\tau = -\frac{p' \wedge p'' \cdot p'''}{|p' \wedge p''|^2}$$

dove gli apici indicano derivazioni rispetto al parametro t. Dal testo abbiamo

$$p'(0) = 6\boldsymbol{e}_x \quad p''(0) = 6\boldsymbol{e}_y \quad p'''(0) = 24\boldsymbol{e}_z$$

da cui segue $p' \wedge p''(0) = 36\boldsymbol{e}_z$ e dunque

$$\tau = -\frac{2}{3}\,.$$

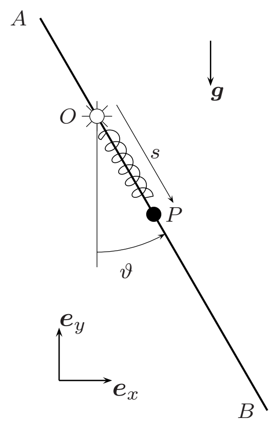
Q2. *In un piano verticale, un'asta omogenea* AB *di massa* $3m$ *e lunghezza* ℓ *è libera di ruotare attorno ad un punto fisso* O *tale che* $OA = \ell/4$. *Un anellino* P *avente dimensioni trascurabili e di massa* $\frac{m}{2}$ *è libero di scorrere lungo l'asta e viene attratto verso* O *da una molla avente lunghezza a riposo nulla e costante elastica* $\frac{mg}{\ell}$. *Calcolare le frequenze delle piccole oscillazioni in un intorno della posizione di equilibrio stabile.*

Sia $s \in [-\ell/4, 3\ell/4]$ l'ascissa di P su AB contata a partire da O e ϑ l'angolo formato da AB con la verticale. L'energia potenziale V del sistema è

$$V(s,\vartheta) = \frac{mg}{2\ell}s^2 - \frac{3mg\ell}{4}\cos\vartheta - \frac{mg}{2}s\cos\vartheta\,,$$

dove abbiamo preso l'orizzontale per O come quota di riferimento per l'energia potenziale gravitazionale. Le posizioni di equilibrio si ottengono annullando le derivate di V rispetto ad s ed a ϑ

$$\begin{cases} \frac{mg}{\ell}s - \frac{mg}{2}\cos\vartheta = 0 \\ mg\sin\vartheta(\frac{3\ell}{4} + \frac{s}{2}) = 0 \end{cases}$$



da cui si ottengono le posizioni $s = \frac{\ell}{2}$, $\vartheta = 0$ ed $s = -\frac{\ell}{2}$, $\vartheta = \pi$. La forma hessiana di V ha elementi

$$\begin{cases} V_{ss} = \frac{mg}{\ell} \\ V_{s\vartheta} = V_{\vartheta s} = \frac{mg}{2} \sin\vartheta \\ V_{\vartheta\vartheta} = mg\cos\vartheta(\frac{3\ell}{4} + \frac{s}{2}) \end{cases}$$

ed una verifica diretta permette di concludere che solo nella configurazione di equilibrio in cui $s = \frac{\ell}{2}$, $\vartheta = 0$ la forma hessiana è definita positiva e dunque corrisponde ad una posizione di equilibrio stabile. Per procedere, calcoliamo l'energia cinetica del sistema

$$T = \frac{1}{2} I_{Oz} \dot{\vartheta}^2 + \frac{m}{4} v_P^2,$$

dove I_{Oz} è il momento di inerzia dell'asta rispetto ad un asse passante per O, diretto lungo $\boldsymbol{e}_z$ e v_P è il modulo della velocità di P. Poiché $|P - O| = \ell/4$, grazie al teorema di Huygens-Steiner concludiamo che $I_{Oz} = \frac{7m}{16}\ell^2$, mentre derivando rispetto al tempo il vettore

$$P - O = \frac{\ell}{4}[s \sin\vartheta \boldsymbol{e}_x - s\cos\vartheta \boldsymbol{e}_y]$$

otteniamo

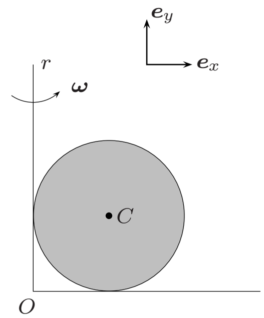
$$v_P^2 = \dot{s}^2 + s^2\dot{\vartheta}^2\,.$$

Sommando i vari contributi concludiamo che

$$T = \frac{m}{4}[\frac{7}{8}\ell^2 + s^2]\dot{\vartheta}^2 + \frac{m}{4}\dot{s}^2$$

da cui ricaviamo la forma quadratica A associata

$$A = \begin{pmatrix} \frac{9}{16} m\ell^2 & 0 \\ 0 & \frac{m}{2} \end{pmatrix}.$$



Poiché anche la forma hessiana B nella configurazione di equilibrio stabile

$$B = \begin{pmatrix} mg\ell & 0 \\ 0 & \frac{mg}{\ell} \end{pmatrix}.$$

è già in forma diagonale, la soluzione dell'equazione $\det(\lambda A - B) = 0$ è alquanto semplificata e consente di ricavare le frequenze delle piccole oscillazioni immediatamente

$$\omega_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{\frac{2g}{\ell}} \qquad \omega_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{\frac{16g}{9\ell}}\,.$$

Q3. *Un disco omogeneo di massa $\frac{m}{2}$ e raggio $3R$ è vincolato a restare nella posizione indicata in figura mentre il piano in cui si trova ruota attorno alla retta r con velocità angolare $\boldsymbol{\omega} = 4\omega \boldsymbol{e}_y$. Calcolare il momento delle forze centrifughe agenti sul disco rispetto al polo O.*

Il momento delle forze centrifughe rispetto ad un punto che, come O, giace sull'asse di rotazione r è

$$\boldsymbol{M}_O = \mathbb{I}_O \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\omega}\,,$$

dove $\mathbb{I}_O$ è il tensore di inerzia del disco rispetto ad O. Dal teorema di Huygens-Steiner, detto C il centro di massa del disco, ricaviamo

$$\mathbb{I}_O \boldsymbol{\omega} = \mathbb{I}_C \boldsymbol{\omega} + \frac{m}{2} d^2 (\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{e}_{CO} \cdot \boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{e}_{CO}),$$

dove $\boldsymbol{e}_{CO}$ è il versore associato a $C - O$ e $d = |C - O| = 3R\sqrt{2}$. Poiché la direzione $\boldsymbol{e}_y$ è direzione centrale di inerzia abbiamo

$$\mathbb{I}_C \boldsymbol{\omega} = 4\omega \mathbb{I}_C \boldsymbol{e}_y = (9/2) m\omega R^2 \boldsymbol{e}_y$$

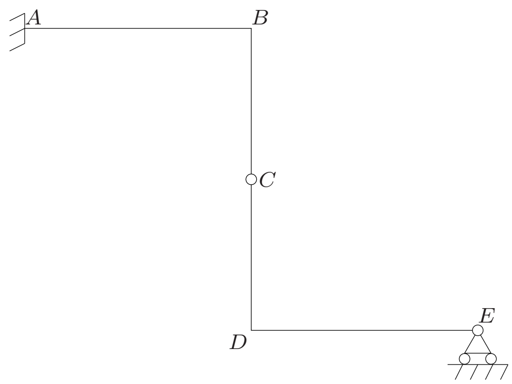
e dunque $\mathbb{I}_C \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{0}$. Abbiamo allora

$$\boldsymbol{M}_O = -144 (\boldsymbol{e}_{CO} \cdot \boldsymbol{e}_y)(\boldsymbol{e}_{CO} \wedge \boldsymbol{e}_y) m R^2 \omega^2$$

e, siccome $\boldsymbol{e}_{CO} = \frac{\sqrt{2}}{2}[\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y]$,

$$\boldsymbol{M}_O = -72m\omega^2 R^2 \boldsymbol{e}_z\,.$$

Q4. *La struttura rigida riportata in Figura è composta dalle aste ABC e CDE, sagomate ad L ed incernierate tra loro in C. L'asta ABC ha peso trascurabile ed è incastrata in A mentre CDE è omogenea di peso $2p$ ed è vincolata da un carrello in E. Sapendo che $BC = CD = 3\ell$ e $AB = DE = 3\ell$, calcolare il modulo Φ della discontinuità dello sforzo assiale in B.*



La discontinuità è imputabile allo spigolo che l'asta ABC forma in B, visto che non ci sono carichi concentrati in B. Spezziamo l'asta in C e consideriamo l'asta CDE. Il tratto DE dell'asta ha peso p, così come il tratto CD. Inoltre, la reazione di cerniera in C ha componente solo lungo la verticale, in quanto non vi sono carichi od altre reazioni vincolari con componenti non nulle lungo $\boldsymbol{e}_x$. Richiedendo l'equilibrio dei momenti rispetto ad E e ponenedo $\boldsymbol{\Phi}_C = \Phi_C \boldsymbol{e}_y$, abbiamo

$$\Phi_C = \frac{3}{2}p\,.$$

Sezioniamo in B l'asta ABC su cui agisce in C la forza $-\boldsymbol{\Phi}_C = -\frac{3}{2}p\boldsymbol{e}_y$ e consideriamo lo sforzo agente in B. Poiché sul tratto BC non agisce altra forza che $-\boldsymbol{\Phi}_C$, lo sforzo in B è

$$\boldsymbol{T} = \frac{3}{2}p\boldsymbol{e}_y\,;$$

poiché, se orientiamo l'asta ABC partendo da C, la tangente in B a BC è $\boldsymbol{e}_y$ mentre la tangente in B a BA è $-\boldsymbol{e}_x$, sforzo $\boldsymbol{T}(B)$ è puramente assiale in B, pensato come punto di BC, e puramente di taglio in B, pensato come punto di AB. Possiamo concludere che il modulo della discontinuità dello sforzo assiale è pari al modulo di $\boldsymbol{T}$ stesso, cioè

$$\Phi = \frac{3}{2}p.$$