Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Esame di Meccanica Razionale
Appello del 17 luglio 2003
Soluzioni: parte II

Q1. *In un piano verticale, un filo inestensibile di peso trascurabile viene fatto passare sopra un supporto semicircolare scabro di raggio R, con il diametro AB orizzontale, caratterizzato da un coefficiente d'attrito statico μ; ad un estremo P del filo viene posto un contrappeso di massa $3m$, mentre l'altro estremo viene fissato nel centro O di AB in modo da sostenere un disco omogeneo di raggio $R/2$ e massa $7m$ (Figura 1). Qual è il minimo valore di μ affinché sia possibile l'equilibrio, nell'ipotesi che il contatto fra il filo e il disco sospeso sia privo d'attrito?*

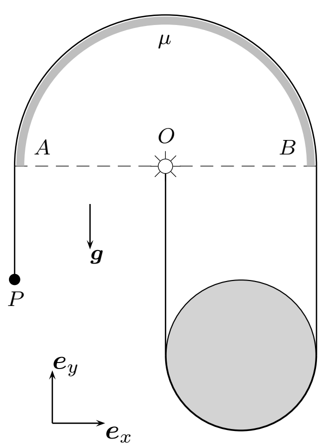

Fig. 1

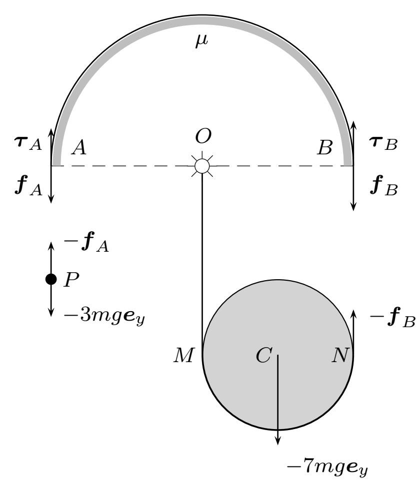

Fig. 1a

Per risolvere il problema, occorre conoscere il valore delle tensioni del filo $\boldsymbol{\tau}_A$ e $\boldsymbol{\tau}_B$ nei punti estremi di contatto con il supporto; siano M ed N gli estremi del diametro del disco sospeso, in cui il filo abbandona la circonferenza del disco, e sia C il centro del disco (vedi figura 1a). Dall'equilibrio per il contrappeso P, ricordando che il filo ha peso trascurabile e, quindi, che la tensione non varia di modulo nel tratto AP, si ha (cfr. figura 1a)

$$\boldsymbol{\tau}_A = -\boldsymbol{f}_A = 3mg\boldsymbol{e}_y\,; \tag{1}$$

con analoghe considerazioni, scrivendo la seconda equazione cardinale della statica per il disco scegliendo M come polo, otteniamo, ponendo $\boldsymbol{f}_B = -f_B\boldsymbol{e}_y$:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{M}_M = (C-M)\wedge(-7mg)\boldsymbol{e}_y + (N-M)\wedge(-\boldsymbol{f}_B) = -7mgR\boldsymbol{e}_z + 2f_BR\boldsymbol{e}_z = 0 \\ &\Rightarrow \boldsymbol{\tau}_B = -\boldsymbol{f}_B = \frac{7}{2}mg\boldsymbol{e}_y\,. \end{aligned} \tag{2}$$

A questo punto, è possibile porsi direttamente in condizioni di equilibrio limite, che è quella necessaria per determinare il μ minimo per l'equilibrio; in questo caso, detto ϑ l'angolo $\widehat{AOQ}$ che identifica la posizione di un punto del filo lungo l'arco $\overset{\frown}{AB}$, è noto che

$$|\boldsymbol{\tau}_Q| = |\boldsymbol{\tau}_A| e^{\mu\vartheta} \,. \tag{3}$$

Usando la (3), combinata con le (1) e (2), otteniamo

$$\frac{7}{2} mg = 3mge^{\mu\pi}$$

da cui la risposta corretta:

$$\mu = \frac{1}{\pi} \ln \frac{7}{6} \tag{4}$$

(Una trattazione più dettagliata per questo genere di problemi è presentata nella soluzione del quesito 2 dell'appello del 26 giugno 2003 - parte I).

Q2. *Si consideri il seguente sistema di vettori applicati:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = 2\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y & \textit{applicato in } P_1 - O \equiv (1,1), \\ \boldsymbol{v}_2 = 2\boldsymbol{e}_x - 2\boldsymbol{e}_y & \textit{applicato in } P_2 - O \equiv (0,0), \\ \boldsymbol{v}_3 = -2\boldsymbol{e}_y & \textit{applicato in } P_3 - O \equiv (1,0). \end{cases}$$

Determinare l'equazione dell'asse centrale.

Il risultante del sistema è

$$\boldsymbol{R} = 4\boldsymbol{e}_x - 3\boldsymbol{e}_y \,, \tag{5}$$

e il momento totale rispetto all'origine è, invece:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_O &= (\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y) \wedge (2\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y) + \boldsymbol{e}_x \wedge (-2\boldsymbol{e}_y) \\ &= \boldsymbol{e}_z - 2\boldsymbol{e}_z - 2\boldsymbol{e}_z = -3\boldsymbol{e}_z \,. \end{aligned} \tag{6}$$

Per determinare l'equazione dell'asse centrale, occorre il prodotto

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R} \wedge \boldsymbol{M}_O &= (4\boldsymbol{e}_x - 3\boldsymbol{e}_y) \wedge (-3\boldsymbol{e}_z) \\ &= 9\boldsymbol{e}_x + 12\boldsymbol{e}_y \,; \end{aligned} \tag{7}$$

considerando la (7), abbiamo per l'asse centrale:

$$C - O = \frac{\boldsymbol{R} \wedge \boldsymbol{M}_O}{R^2} + \lambda \boldsymbol{R} \,, \tag{8}$$

ossia

$$x = \frac{9}{(25)} + 4\lambda \tag{9a}$$

$$y = \frac{12}{(25)} + 4\lambda \,. \tag{9b}$$

Ricavando il parametro λ dalla (9b) e sostituendolo nella (9b) otteniamo:

$$\lambda = \frac{4}{(25)} - \frac{y}{3} \tag{10a}$$

$$x = \frac{9}{(25)} + \frac{16}{(25)} - \frac{4}{3}y = 1 - \frac{4}{3}y\,, \tag{10b}$$

rielaborata, la (10b) porta alla risposta cercata:

$$4y + 3x - 3 = 0\,. \tag{11}$$

Q3. *Si consideri un corpo rigido $\mathcal{B}$ di massa m. Se $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità angolare di $\mathcal{B}$, G il centro di massa di $\mathcal{B}$ e $\boldsymbol{v}_O \neq \mathbf{0}$ la velocità di un punto O di $\mathcal{B}$ diverso da G, quale tra le seguenti espressioni dell'energia cinetica T di $\mathcal{B}$è sicuramente corretta? ($\mathbb{I}_P$ indica il tensore di inerzia calcolato rispetto a un punto P e, per i vettori $\boldsymbol{u}$, $u = |\boldsymbol{u}|$)*

1. $T = \frac{1}{2}\mathbb{I}_O\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\omega}$
2. $T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\mathbb{I}_O\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}$
3. $T = -\frac{1}{2}mv_G^2$
4. $T = \frac{1}{2}mv_O^2 + \frac{1}{2}\mathbb{I}_O\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}$
5. $T = \frac{1}{2}mv_O^2 + \frac{1}{2}\mathbb{I}_G\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}$
6. $T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\mathbb{I}_G\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}$
7. $T = \frac{1}{2}\mathbb{I}_O\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}$
8. $T = \frac{1}{2}mv_O^2$

La risposta corretta è la (6); essa, infatti, é l'unica sempre valida. Infatti, scrivendo il teorema di König rispetto a un punto O generico per un corpo rigido, usando le notazioni introdotte nella domanda, si ottiene:

$$T = \frac{m}{2}v_O^2 + \boldsymbol{v}_O \cdot \boldsymbol{\omega} \wedge m(G - O) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbb{I}_O\boldsymbol{\omega}\,; \tag{12}$$

prendendo O coincidente con G nella (12), si ha proprio l'espressione della (6), poiché $G - G = \mathbf{0}$, e quindi il secondo termine si annulla. La (1) è palesemente falsa, dato che il secondo membro è un vettore, anziché uno scalare; la (3) non può rappresentare un'energia cinetica, essendo negativa; Infine, le risposte 2, 4, 5, 7 e 8 sono da scartare perché sarebbero corrette solo in alcuni casi particolari (ad esempio, la 8 sarebbe valida se $\boldsymbol{v}_O = \mathbf{0}$, che non è il nostro caso, essendo detto esplicitamente che $\boldsymbol{v}_O \neq \mathbf{0}$).

Q4. *Due aste OA ed OB di lunghezze ℓ e $\sqrt{2}\ell$ e masse $2m$ e $2m$, rispettivamente, sono saldate in O in modo da formare un angolo retto (Figura 2). Calcolare il momento centrale di inerzia rispetto alla direzione $\boldsymbol{e}_x$.*

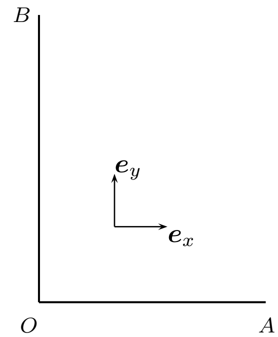

Fig. 2

Per risolvere il quesito, è possibile fare ricorso al corollario del teorema di HUYGENS-STEINER che permette di calcolare il momento d'inerzia rispetto a una direzione una volta noto quello centrale nella direzione parallela e la distanza fra i due assi in gioco. Per fare questo, visto che ci viene chiesto il momento centrale di inerzia rispetto alla direzione $\boldsymbol{e}_x$, fissata l'origine del riferimento cartesiano in O basta conoscere l'ordinata y_C del centro di massa C del sistema; in base alla definizione di centro di massa si ha:

$$y_C = \frac{0 + 2m\sqrt{2}\frac{\ell}{2}}{2m + 2m} = \frac{\sqrt{2}}{4}\ell\,; \tag{13}$$

detti, rispettivamente, G_1 e G_2 i centri di massa delle aste OA e OB, si ha per il momento d'inerzia I_x cercato:

$$\begin{aligned} I_x &= I^{(OA)}_{G_1 x} + 2m(y_C - y_{G_1})^2 + I^{(OB)}_{G_2 x} + 2m(y_C - y_{G_2})^2 \\ &= 0 + 2m(\frac{\sqrt{2}}{4}\ell)^2 + \frac{2m}{12}2\ell^2 + 2m(\frac{\sqrt{2}}{4}\ell - \frac{\sqrt{2}\ell}{2})^2\,, \end{aligned} \tag{14}$$

dove i momenti centrali d'inerzia $I^{(OA)}_{G_1 x}$ e $I^{(OB)}_{G_2 x}$ delle due aste sono stati determinati a partire dal tensore c'entrale d'inerzia di un'asta omogenea di massa ν e lunghezza λ, che si può scrivere nella seguente forma

$$\mathbb{I}_G = \frac{\nu\lambda^2}{12}(\mathbf{I} - \boldsymbol{e} \otimes \boldsymbol{e})\,, \tag{15}$$

se G è il centro di massa dell'asta ed $\boldsymbol{e}$ un versore diretto come l'asta. Effettuando le opportune semplificazioni nella (14) otteniamo la risposta corretta

$$I_x = \frac{5}{6}m\ell^2\,. \tag{16}$$

Al medesimo risultato si può giungere utilizzando il teorema di composizione, che consente di scrivere il tensore centrale d'inerzia complessivo $\mathbb{I}_C$ conoscendo i due tensori centrali delle aste $\mathbb{I}^{(OA)}_{G_1}$ e $\mathbb{I}^{(OB)}_{G_2}$:

$$\mathbb{I}_C = \mathbb{I}_{G_1}^{(OA)} + \mathbb{I}_{G_2}^{(OB)} + \mu d^2(\mathbf{I} - \boldsymbol{e}_{12} \otimes \boldsymbol{e}_{12})\,; \tag{17}$$

in questa espressione, la massa ridotta del sistema μ. la distanza fra i due centri di massa d ed il versore $\boldsymbol{e}_{12}$ sono dati da:

$$\mu := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = m \tag{18a}$$

$$d := |G_2 - G_1| = \frac{\sqrt{3}}{2}\ell \tag{18b}$$

$$\boldsymbol{e}_{12} := \frac{(G_2 - G_1)}{d} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-\boldsymbol{e}_x + \sqrt{2}\boldsymbol{e}_y)\,. \tag{18c}$$

Calcoliamo prima il prodotto diadico che compare nell'ultimo termine della (17):

$$\boldsymbol{e}_{12} \otimes \boldsymbol{e}_{12} = \frac{1}{3}\left(\boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y \otimes \boldsymbol{e}_y - \sqrt{2}(\boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_y \otimes \boldsymbol{e}_x)\right)\,. \tag{19}$$

Ricordiamo che il momento d'inerzia cercato è dato da $I_x = \boldsymbol{e}_x \cdot \mathbb{I}_C \boldsymbol{e}_x$; si ha, quindi:

$$\begin{aligned}
I_x &= \boldsymbol{e}_x \cdot (\mathbb{I}_{G_1}^{(OA)} + \mathbb{I}_{G_2}^{(OB)} + \mu d^2(\mathbf{I} - \boldsymbol{e}_{12} \otimes \boldsymbol{e}_{12})\boldsymbol{e}_x \\
&= \boldsymbol{e}_x \cdot \left(\frac{m\ell^2}{6}(\mathbf{I} - \boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_x) + \frac{m\ell^2}{3}(\mathbf{I} - \boldsymbol{e}_y \otimes \boldsymbol{e}_y) + \frac{3m\ell^2}{4}(\mathbf{I} - \boldsymbol{e}_{12} \otimes \boldsymbol{e}_{12})\right)\boldsymbol{e}_x \\
&= 0 + \frac{m\ell^2}{3} + \frac{3m\ell^2}{4}(1 - \frac{1}{3}) \\
&= \frac{5}{6}m\ell^2\,,
\end{aligned} \tag{20}$$

come avevamo ottenuto precedentemente; si noti che nel penultimo passaggio della (20) per calcolare il contributo del termine (19) basta ricordare le proprietà delle diadi unitamente a quelle di ortonormalità fra $\boldsymbol{e}_x$ e $\boldsymbol{e}_y$.