Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria

Esame di Meccanica Razionale

Appello del 18 luglio 2002

Soluzioni

D1. *Dati i tensori* $\mathbf{A} = 3\boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_z + \boldsymbol{e}_y \otimes \boldsymbol{e}_x + 5\boldsymbol{e}_z \otimes \boldsymbol{e}_y$ e $\mathbf{B} = -\boldsymbol{e}_y \otimes \boldsymbol{e}_y + 2\boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_z + \boldsymbol{e}_z \otimes \boldsymbol{e}_y$, *trovare l'espressione di* $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$.

Ricordiamo che $(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b})(\boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{d})$ e teniamo presente che il prodotto di due tensori (o diadi) non è commutativo. Poiché $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = 1$ se $i = j \quad (i,j = x,y,z)$, e nullo altrimenti, possiamo effettuare il calcolo diretto:

$$\mathbf{AB} = 3\boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_y + 2\boldsymbol{e}_y \otimes \boldsymbol{e}_z - 5\boldsymbol{e}_z \otimes \boldsymbol{e}_y$$

$$\mathbf{BA} = -\boldsymbol{e}_y \otimes \boldsymbol{e}_x + 10\boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z \otimes \boldsymbol{e}_x$$

pertanto,

$$\mathbf{AB} - \mathbf{BA} = -7\boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_y + 2\boldsymbol{e}_y \otimes \boldsymbol{e}_z + \boldsymbol{e}_y \otimes \boldsymbol{e}_x - 5\boldsymbol{e}_z \otimes \boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_z \otimes \boldsymbol{e}_x$$

è la soluzione cercata.

Alternativamente, è possibile ricorrere alla rappresentazione matriciale dei tensori nella base usata: in tal caso l'elemento x_{ij} della matrice corrisponde alla componente cartesiana corrispondente del tensore, ossia al coefficiente della diade $\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il calcolo di $AB - BA$ viene quindi effettuato riconducendosi al prodotto fra matrici ("righe per colonne") e la soluzione finale si ottoene ritornando alla scrittura tramite le diadi. (Nota: questo metodo, seppure più 'confortante' per alcuni, risulta leggermente più elaborato del precedente: infatti occorre tenere presente nel calcolo del prodotto fra due diadi, che, poiché i tensori sono rappresentati nella base canonica di diadi, il loro prodotto dà contributo solo se il secondo elemento della prima diade coincide con il primo della seconda.

In effetti, quest'ultima considerazione permette di individuare la soluzione corretta in modo rapido sulla base di semplici considerazioni. Notiamo, anzitutto che, nelle possibili risposte proposte, il primo termine è sempre $-7\boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_y$, quindi non è discriminante per l'individuazione corretta della risposta esatta; il secondo termine, contiene la diade $\boldsymbol{e}_y \otimes \boldsymbol{e}_z$, quindi proviene dai termini evidenziati: $\mathbf{A} = 3\boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_z + \boldsymbol{e}_y \otimes \boldsymbol{e}_x + 5\boldsymbol{e}_z \otimes \boldsymbol{e}_y$ e $\mathbf{B} = -\boldsymbol{e}_y \otimes \boldsymbol{e}_y + 2\boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_z + \boldsymbol{e}_z \otimes \boldsymbol{e}_y$, quando si effettua il calcolo di $\mathbf{AB}$, mentre non si hanno contributi da **BA**, come si deduce immediatamente considerando le regole di calcolo tensoriale per le diadi. La soluzione corretta, quindi, deve contenere il termine $+2\boldsymbol{e}_y \otimes \boldsymbol{e}_z$: ve ne sono solo due possibili:

○ $-7\boldsymbol{e}_x\otimes\boldsymbol{e}_y-2\boldsymbol{e}_y\otimes\boldsymbol{e}_z+\boldsymbol{e}_y\otimes\boldsymbol{e}_x-5\boldsymbol{e}_z\otimes\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z\otimes\boldsymbol{e}_x$ ○ $-7\boldsymbol{e}_x\otimes\boldsymbol{e}_y-2\boldsymbol{e}_y\otimes\boldsymbol{e}_z+2\boldsymbol{e}_y\otimes\boldsymbol{e}_x+10\boldsymbol{e}_z\otimes\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z\otimes\boldsymbol{e}_x$
○ $-7\boldsymbol{e}_x\otimes\boldsymbol{e}_y-4\boldsymbol{e}_y\otimes\boldsymbol{e}_z+4\boldsymbol{e}_y\otimes\boldsymbol{e}_x+10\boldsymbol{e}_z\otimes\boldsymbol{e}_y+2\boldsymbol{e}_z\otimes\boldsymbol{e}_x$ ○ $-7\boldsymbol{e}_x\otimes\boldsymbol{e}_y-4\boldsymbol{e}_y\otimes\boldsymbol{e}_z+2\boldsymbol{e}_y\otimes\boldsymbol{e}_x+5\boldsymbol{e}_z\otimes\boldsymbol{e}_y+2\boldsymbol{e}_z\otimes\boldsymbol{e}_x$
○ $-7\boldsymbol{e}_x\otimes\boldsymbol{e}_y+2\boldsymbol{e}_y\otimes\boldsymbol{e}_z+2\boldsymbol{e}_y\otimes\boldsymbol{e}_x-10\boldsymbol{e}_z\otimes\boldsymbol{e}_y-\boldsymbol{e}_z\otimes\boldsymbol{e}_x$ ○ $-7\boldsymbol{e}_x\otimes\boldsymbol{e}_y+2\boldsymbol{e}_y\otimes\boldsymbol{e}_z+\boldsymbol{e}_y\otimes\boldsymbol{e}_x-5\boldsymbol{e}_z\otimes\boldsymbol{e}_y-\boldsymbol{e}_z\otimes\boldsymbol{e}_x$
○ $-7\boldsymbol{e}_x\otimes\boldsymbol{e}_y+4\boldsymbol{e}_y\otimes\boldsymbol{e}_z-4\boldsymbol{e}_y\otimes\boldsymbol{e}_x+10\boldsymbol{e}_z\otimes\boldsymbol{e}_y-2\boldsymbol{e}_z\otimes\boldsymbol{e}_x$ ○ $-7\boldsymbol{e}_x\otimes\boldsymbol{e}_y+4\boldsymbol{e}_y\otimes\boldsymbol{e}_z-2\boldsymbol{e}_y\otimes\boldsymbol{e}_x+5\boldsymbol{e}_z\otimes\boldsymbol{e}_y-2\boldsymbol{e}_z\otimes\boldsymbol{e}_x$

A questo punto, è facile trovare la soluzione corretta, procedendo alla stessa maniera sul termine in $\boldsymbol{e}_y \otimes \boldsymbol{e}_x$, che si ottiene soltanto calcolando **BA**.

○ $-7\boldsymbol{e}_x\otimes\boldsymbol{e}_y+2\boldsymbol{e}_y\otimes\boldsymbol{e}_z+2\boldsymbol{e}_y\otimes\boldsymbol{e}_x-10\boldsymbol{e}_z\otimes\boldsymbol{e}_y-\boldsymbol{e}_z\otimes\boldsymbol{e}_x$ • $-7\boldsymbol{e}_x\otimes\boldsymbol{e}_y+2\boldsymbol{e}_y\otimes\boldsymbol{e}_z+\boldsymbol{e}_y\otimes\boldsymbol{e}_x-5\boldsymbol{e}_z\otimes\boldsymbol{e}_y-\boldsymbol{e}_z\otimes\boldsymbol{e}_x$

D2. *Due aste OA ed OB di lunghezza ℓ e massa $3m$ e m, rispettivamente, sono saldate ad angolo retto in O (Figura 1). Calcolare il momento di inerzia in O rispetto alla direzione del versore* $\boldsymbol{n} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_x + \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_y$.

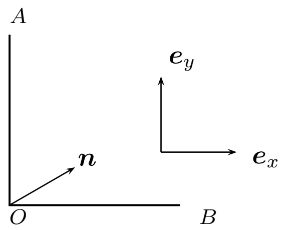

Fig.1

Ricordando l'espressione del tensore centrale d'inerzia per la singola asta, e utilizzando per ogni asta il teorema di Huygens-Steiner, possiamo scrivere il tensore d'inerzia complessivo in O:

$$\mathbf{I}_O = \frac{1}{3}m\ell^2(\boldsymbol{e}_y\otimes\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z\otimes\boldsymbol{e}_z)+\frac{1}{3}3m\ell^2(\boldsymbol{e}_x\otimes\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_z\otimes\boldsymbol{e}_z)=\frac{1}{3}m\ell^2(3\boldsymbol{e}_x\otimes\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y\otimes\boldsymbol{e}_y+4\boldsymbol{e}_z\otimes\boldsymbol{e}_z).$$

Ora, per definizione, è

$$I_n = \boldsymbol{n}\cdot\mathbf{I}_O\boldsymbol{n} = \frac{1}{3}m\ell^2(-\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_x+\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_y)\cdot(-3\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_x+\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_y),$$

ossia, sviluppando i calcoli

$$I_n = \frac{1}{3}m\ell^2(3\frac{3}{4}+1\frac{1}{4}) = \frac{5}{6}m\ell^2$$

D3. *Trovare il raggio di curvatura della curva*

$$P(t) - O = \mathrm{e}^t \cos 2t \boldsymbol{e}_x + 4(t \sin t - t)\boldsymbol{e}_y - 2\mathrm{e}^{-t}\boldsymbol{e}_z$$

nel punto corrispondente a $t = 0$.

Si tratta di un esercizio standard, in cui occorre unicamente applicare correttamente le formule per il calcolo delle caratteristiche della curva in funzione del parametro. Deriviamo due volte rispetto al parametro t, e otteniamo

$$P'(t) = e^t(\cos 2t - 2\sin 2t)\boldsymbol{e}_x + 4(\sin t + t\cos t - 1)\boldsymbol{e}_y + 2e^{-t}\boldsymbol{e}_z$$

e

$$P''(t) = e^t(\cos 2t - 4\sin 2t - 4\cos 2t)\boldsymbol{e}_x + 4(2\cos t - t\sin t)\boldsymbol{e}_y - 2e^{-t}\boldsymbol{e}_z$$

cosicché in $t = 0$ è

$$P'(0) = \boldsymbol{e}_x - 4\boldsymbol{e}_y + 2\boldsymbol{e}_z, \qquad P''(0) = -3\boldsymbol{e}_x + 8\boldsymbol{e}_y - 2\boldsymbol{e}_z :$$

ricordando che il raggio di curvatura r è il reciproco della curvatura, possiamo concludere che

$$r(0) = \frac{|P'(0)|^3}{|P'(0) \wedge P''(0)|}$$

e, calcolando il prodotto vettoriale $P'(0) \wedge P''(0) = -8\boldsymbol{e}_x - 4\boldsymbol{e}_y - 4\boldsymbol{e}_z$, otteniamo, finalmente

$$r(0) = \frac{21}{4}\sqrt{\frac{7}{2}}$$

D4. *Si consideri il seguente sistema di vettori applicati:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{e}_x - 3\boldsymbol{e}_z & \textit{applicato in } P_1 - O \equiv (\alpha, 0, 1), \\ \boldsymbol{v}_2 = 4\boldsymbol{e}_y & \textit{applicato in } P_2 - O \equiv (2, 1, -1), \\ \boldsymbol{v}_3 = 2\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y & \textit{applicato in } P_3 - O \equiv (0, 0, 2). \end{cases}$$

Trovare per quale valore di α *il trinomio invariante assume il valore 5.*

Anche in questo caso, basta ricorrere alla definizione di trinomio invariante $I = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{M}_P$, dove P un qualunque polo scelto per calcolare i momenti (nel nostro caso, conviene scegliere l'origine O).
Calcoliamo i vettori risultante ($\boldsymbol{R}$) e momento risultante ($\boldsymbol{M}_O$):

$$\boldsymbol{R} = 3\boldsymbol{e}_x + 6\boldsymbol{e}_y - 3\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{M}_O = (P_1 - O) \wedge \boldsymbol{v}_1 + (P_2 - O) \wedge \boldsymbol{v}_2 + (P_3 - O) \wedge \boldsymbol{v}_3 = (3\alpha + 5)\boldsymbol{e}_y + 8\boldsymbol{e}_z$$

e, ponendo $\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{M}_O = 5$, otteniamo:

$$\alpha = -\frac{1}{18}$$

E1. *Un disco omogeneo di massa $3m$ e raggio r è vincolato a rotolare senza strisciare su un piano inclinato di $\frac{\pi}{6}$ sull'orizzontale (Figura 2); il centro del disco è soggetto ad una forza elastica di costante $4k$ che lo attrae ad un punto P, posto a distanza r dal piano inclinato. Scrivere l'equazione di* Lagrange *per il sistema rispetto alla variabile x indicata in figura.*

Il vincolo di puro rotolamento impone che la velocità angolare del disco sia $\boldsymbol{\omega} = -\frac{\dot{x}}{r}\boldsymbol{e}_z$. Essendo l'atto di moto del disco in ogni istante rotatorio rispetto al punto di istantaneo contatto con il piano inclinato, l'energia cinetica T risulta data da:

$$T = \frac{1}{2}\frac{3}{2}3mr^2\omega^2 = \frac{9}{4}m\dot{x}^2$$

L'energia potenziale V avrà un contributo dovuto alla forza elastica e uno dovuto al peso. Risulta, a mneo di costanti additive:

$$V = \frac{1}{2}4kx^2 - 3mgx\sin\frac{\pi}{6} = 2kx^2 - \frac{3}{2}mgx.$$

Detta $L = T - V$ la funzione di Lagrange per il sistema, l'equazione rispetto all'unica coordinata libera x sarà:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x},$$

ossia

$$\frac{9}{2}\ddot{x} = -4kx + \frac{3}{2}mg,$$

che, moltiplicando ambo i membri per 2, fornisce la risposta cercata: $9\ddot{x} = -8kx + 3mg$.

E2. *In un piano verticale, un filo AB omogeneo di peso specifico p e lunghezza $2\sqrt{3}\ell$ ha gli estremi vincolati a due guide tra loro ortogonali (Figura 3), con l'estremo B sollecitato da una forza $\boldsymbol{f} = 2p\ell\boldsymbol{e}_x$. Trovare il valore di OB all'equilibrio.*

Alle condizioni proposte, filo si atteggia secondo una catenaria, di equazione generale $y(x) = D + \alpha\cosh(\frac{x}{\alpha} + C)$, con le costanti C, D e α da determinare in base al problema (in particolare, si noterà che D implica solo una traslazione degli assi in direzione verticale, e risulterà ininfluente ai fini della risoluzione). Sia O l'origine del sistema di riferimento prescelto.
La condizione al bordo in B vuole che la tensione sia uguale alla forza esterna applicata nello stesso punto, ossia, nel nostro caso la $\boldsymbol{f}$ composta con la reazione vincolare, che può avere solo componente lungo la direzione di $\boldsymbol{e}_y$, per l'assenza di attrito. D'altronde, la componente orizzontale della tensione del filo è costante, e data da $T_x = \alpha p$. Quindi, si ottiene subito che $\alpha = 2\ell$.
Inoltre, la lunghezza del filo risulta essere

$$2\sqrt{3}\ell = \alpha[\sinh(\frac{x_B}{\alpha} + C) - \sinh(\frac{x_A}{\alpha} + C)],$$

e la costante C può essere determinata dall'espressione della componente lungo y della tensione del filo ($T_y = \alpha p\sinh(\frac{x}{\alpha} + C)$): la natura del vincolo in A permette di concludere che $C = 0$; inoltre, con la nostra scelta di riferimento, si ha $x_A = 0$ e $x_B = d$.

Otteniamo, quindi,

$$2\sqrt{3}\ell = 2\ell\sinh(\frac{d}{2\ell})$$

Ponendo $t := \frac{d}{2\ell}$, e ricordando la definizione di $\sinh t$ in termini di e^t e e^{-t}, otteniamo un'equazione trascendente in t

$$2\sqrt{3} = e^t - e^{-t}$$

che può venire risolta ponendo $z = e^t$, per avere l'equazione di secondo grado nella variabile z: $z^2 - 2\sqrt{z} - 1 = 0$, la cui unica soluzione positiva è $z = 2 + \sqrt{3}$.

Da $z = e^{\frac{d}{2\ell}}$si ottiene la risposta cercata:

$$d = 2\ell \ln(2 + \sqrt{3}).$$

E3. *Sul bordo di un disco omogeneo di raggio R di massa $4m$ è saldato un punto materiale P di massa m (Figura 4). Il disco è vincolato a rotolare senza strisciare su una guida piana orizzontale. Siano O il centro del disco, H il punto di contatto fra la guida ed il disco, e ϑ l'angolo che il segmento PO forma con l'orizzontale. Calcolare il modulo del momento della quantità di moto del sistema rispetto ad H.*

Il punto di istantaneo appoggio H è anche centro di istantanea rotazione del sistema, pensato come un unico corpo rigido. Il modulo del momento delle quantità di moto si trova sommando il contributo del disco e del punto materiale. Per il primo corpo, abbiamo

$$K_H^{\text{disco}} = \frac{3}{2} 4mr^2\dot{\vartheta},$$

essendo $\dot{\vartheta}$ il modulo della velocità angolare, in virtù della definizione dell'angolo ϑ.
Per il punto, basta osservare che il modulo della velocità è dato da $v_P = (PH)\dot{\vartheta}$, in cui PH è il modulo del vettore $P - H$, pertanto il suo contributo al momento della quantità di moto sarà:

$$K_H^{\text{P}} = m(PH)^2\dot{\vartheta}$$

(il vettore $P - H$ e $\boldsymbol{v}_P$ sono ortgonali).

Usando il teorema di Carnot per i triangoli qualunque, si ha $(PH)^2 = 2r^2 - 2r^2\cos(\frac{\pi}{2} + \vartheta)$. È immediato constatare che i due contributi si sommano perché concordi i versi dei vettori corrispondenti, pertanto la risposta corretta è:

$$K_H = (8 + 2\sin\vartheta)mR^2\dot{\vartheta}$$

E4. *Su un'asta sagomata a T agisce un carico la cui densità nel punto P di AB a distanza x da A è $\boldsymbol{f} = \frac{p}{\ell^2}x\boldsymbol{e}_y$ Se $AB = 3\ell$ e $AD = QD = \ell$, quanto vale in valore assoluto la discontinuità del momento flettente in D?*

Poiché l'asta non è soggetta a forze attive aventi componente lungo la direzione di $\boldsymbol{e}_x$, la reazione vincolare in Q manca della corrispondente componente. Inoltre, il tratto DQ è scarico, quindi il momento flettente su questo tratto è uniforme, e uguale al momento della reazione vincolare in Q. Questo è anche il valore della discontinuità del momento flettente in D richiesta.

Per trovare la risposta corretta, basta quindi calcolare il momento della coppia vincolare in Q scrivendo la seconda equazione cardinale scegliendo lo stesso punto come polo, per non introdurre altre incognite vincolari (in virtù dell'osservazione fatta all'inizio, il polo D, per esempio, sarebbe equivalente).
nel calcolo del momento delle forze attive, occorre ricordare che il risultante R di un sistema come quello proposto si trova a $\frac{2}{3}$ della lunghezza del tratto AB, a partire da A, cioè nel punto P tale che $AP = \frac{2}{3}AB$, ossia $AQ = QP$. Inoltre, $R = \frac{1}{2}\frac{p}{\ell^2}(AB)^2 = \frac{9}{2}p$, quindi

$$\Delta M_f = \frac{9}{2}p\ell$$

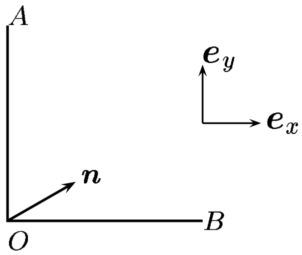

Fig. 1

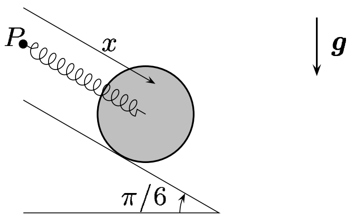

Fig.2

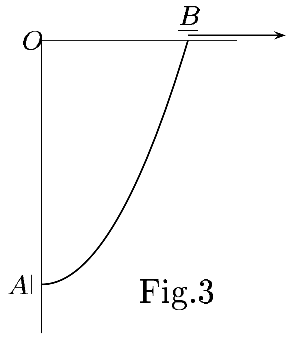

Fig.3

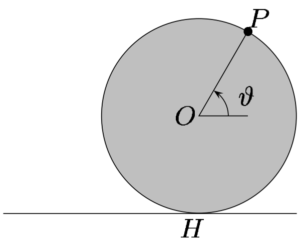

Fig.4

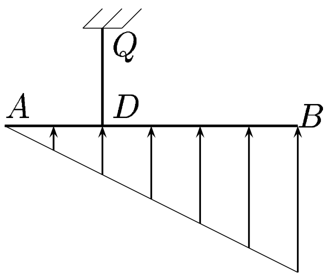

Fig. 5