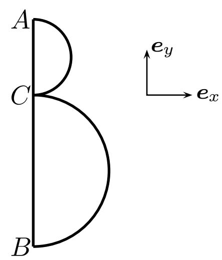
Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Esame di Meccanica Razionale
Appello del 20 aprile 2006
Soluzioni (Parte I)

Q1. *Ad un'asta* AB *omogenea di massa* $2m$ *e lunghezza* 9ℓ *vengono saldate due semicirconferenze di diametri* $AC = 3\ell$ *e* $CB = 6\ell$*, ciascuna di massa* $3m$*. Trovare il momento di inerzia per la figura complessiva rispetto all'asse passante per* C *e diretto come* $\boldsymbol{e}_x$*.*



Il momento di inerzia I_{Cx} richiesto si compone di tre addendi uno —$I_{Cx}(AB)$— dovuto all'asta AB e altri due—$I_{Cx}(\mathcal{S}_1)$ e $I_{Cx}(\mathcal{S}_2)$ dovuti alle semicirconferenze $\mathcal{S}_1$ ed $\mathcal{S}_2$ di diametri AC e CB, rispettivamente. Il primo contributo si calcola con l'ausilio del teorema di Huygens-Steiner, osservando che con i dati del problema la distanza tra i due assi diretti lungo $\boldsymbol{e}_x$, uno passante per C, l'altro per il centro di massa dell'asta è pari a $3\ell/2$ cosicché

$$I_{Cx}(AB) = \frac{27}{2}m\ell^2 + \frac{9}{2}m\ell^2 = 18m\ell^2,$$

dove il primo addendo è il momento centrale di inerzia nella direzione $\boldsymbol{e}_x$. Quanto al contributo di $\mathcal{S}_1$ osserviamo che, per simmetria, $I_{Cx}(\mathcal{S}_1) = \frac{1}{2}I_{Cx}(\mathcal{C}_1)$, dove $\mathcal{C}_1$ è la circonferenza ribaltando $\mathcal{S}_1$ attorno ad AB. Grazie ancora al teorema di Huygens-Steiner otteniamo

$$I_{Cx}(\mathcal{S}_1) = \frac{1}{2}I_{Cx}(\mathcal{C}_1) = [3m\frac{9}{8}\ell^2 + 3m\ell^2\frac{9}{4}] = \frac{81}{8}m\ell^2\,,$$

dove si è anche notato che la massa di $\mathcal{C}_1$ è $6m$ ed il raggio $3R/2$. un calcolo simile per la seconda semicirconferenza $\mathcal{S}_2$ di raggio $3R$ consente di ottenere

$$I_{Cx}(\mathcal{S}_2) = \frac{81}{2}mR^2\,.$$

Sommando i tre contributi ottenuti otteniamo

$$I_{Cx}(tot) = \frac{549}{8}.$$

Q2. *Quale tra le seguenti affermazioni sulle azioni interne ad un'asta euleriana è certamente corretta?*

◯ Il momento torcente è proporzionale alla curvatura.
◯ Lo sforzo di taglio è proporzionale alla curvatura.
◯ Il momento flettente è inversamente proporzionale alla curvatura.
◯ Il momento torcente è inversamente proporzionale alla curvatura.
◯ Lo sforzo di taglio è inversamente proporzionale alla curvatura.
◯ Il momento flettente è proporzionale alla curvatura.
◯ Gli sforzi interni sono sempre diretti lungo la tangente all'asta.
◯ Nessuna delle precedenti.

Per definizione, il momento flettente $\mathbf{\Gamma}$ sviluppato da un'asta euleriana è proporzionale alla curvatura κ dell'asta, $\mathbf{\Gamma} = B\kappa\boldsymbol{b}$, dove $\boldsymbol{b}$ è il versore binormale alla curva.

Q3. *Trovare l'equazione dell'asse centrale del seguente sistema piano di vettori applicati:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{e}_x + 3\boldsymbol{e}_y & \textit{applicato in } P_1 - O \equiv (0,1), \\ \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{e}_x - 2\boldsymbol{e}_y & \textit{applicato in } P_2 - O \equiv (1,-2), \\ \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y & \textit{applicato in } P_3 - O \equiv (1,1). \end{cases}$$

Il risultante $\boldsymbol{R}$ del sistema è $\boldsymbol{R} = 3\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y$. Il momento risultante rispetto all'origine O è

$$\boldsymbol{M}_O = -\boldsymbol{e}_z$$

e dunque l'asse centrale è il luogo dei punti Q tali che

$$Q - O \equiv x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y = \frac{\boldsymbol{R} \wedge \boldsymbol{M}_O}{|R^2|} + \lambda\boldsymbol{R} = \frac{1}{13}(3\boldsymbol{e}_y - 2\boldsymbol{e}_x) + \lambda(3\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y)$$

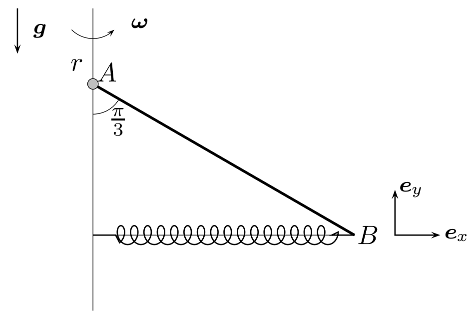
che, risolta in componenti, fornisce le equazioni paramtriche

$$\begin{cases} x = -\frac{2}{13} + 3\lambda \\ y = \frac{3}{13} + 2\lambda \end{cases}$$

da cui, eliminando λ, si ricava l'equazione cartesiana dell'asse centrale

$$2x - 3y + 1 = 0.$$

Q4. *In un piano verticale, un'asta omogenea AB di massa m e lunghezza 2ℓ è appoggiata all'ipotenusa di un supporto triangolare (Figura 1). con AB inclinata di $\pi/3$ sulla verticale. L'estremo A è incernierato senza attrito ad un asse verticale r e l'estremo B è attratto verso il punto di r posto alla stessa quota da una forza elastica di costante $3mg/\ell$. Il piano in cui si trova la lamina*



ruota uniformemente attorno ad r con velocità angolare costante $\boldsymbol{\omega} = \lambda\sqrt{\frac{g}{\ell}}$. Trovare il massimo valore di λ compatibile con il contatto tra la lamina ed il supporto

Studiamo le forze agenti sull'asta AB, ponendoci nel riferimento rotante. Oltre alla reazione vincolare sviluppata dalla cerniera in A, sono presenti la forza peso $-mg\boldsymbol{e}_y$ applicata nel centro di massa dell'asta, la forza elastica $-3\sqrt{3}mg\boldsymbol{e}_x$ esercitata in B dalla molla, il sistema di forze centrifughe di risultante $\lambda^2 mg(\sqrt{3}/2)\boldsymbol{e}_x$, applicato nel punto Q tale che $AQ = 4\ell/3$ ed il sistema di reazioni vincolari di appoggio sul substrato che, finché c'è contatto ha risultante ortogonale ad AB, orientato verso l'esterno del substrato. In particolare, tale sistema di reazioni di appoggio esercita una coppia $\Psi\boldsymbol{e}_z$ rispetto ad A, con $\Psi \geq 0$ in condizioni di contatto. Imponendo l'equilibrio dei momenti rispetto ad A abbiamo

$$\left(\Psi + (\frac{2}{3}\lambda^2 - 7)mg\ell\sqrt{3}/2\right)\boldsymbol{e}_z = \mathbf{0}/,;$$

risolvendo in Ψ ed imponendo la condizione di contatto $\Psi \geq 0$ otteniamo

$$\lambda \leq \sqrt{\frac{21}{2}}.$$