*Università di Pavia*
*Facoltà di Ingegneria*
Esame di Meccanica Razionale
Appello del 20 settembre 2005
**Soluzioni (Parte I)**

**Q1.** *Trovare la curvatura $\kappa$ della curva*

$$p(t) - o = 2t\cos t\boldsymbol{e}_x + \sqrt{2}t\sin t\boldsymbol{e}_y + \sqrt{2}t^2\cos t\boldsymbol{e}_z$$

*nel punto corrispondente a $t = 0$.*

Eseguendo due derivazioni rispetto al parametro $t$ otteniamo

$$\dot{p} = 2(\cos t - t\sin t)\boldsymbol{e}_x + \sqrt{2}(\sin t + t\cos t)\boldsymbol{e}_y + \sqrt{2}(2t\cos t - t^2\sin t)\boldsymbol{e}_z$$

e

$$\ddot{p} = -2(2\sin t + t\cos t)\boldsymbol{e}_x + \sqrt{2}(2\cos t - t\sin t)\boldsymbol{e}_y + \sqrt{2}(2\cos t - 4t\sin t - t^2\cos t)\boldsymbol{e}_z$$

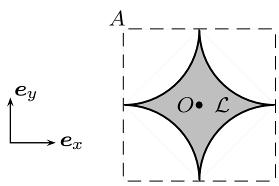
da cui segue

$$\dot{p}(0) = 2\boldsymbol{e}_x\,, \qquad \ddot{p}(0) = 2\sqrt{2}(\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z) \quad \text{e} \quad \dot{p}(0)\wedge\ddot{p}(0) = 4\sqrt{2}(\boldsymbol{e}_z - \boldsymbol{e}_y)$$

e dunque

$$\kappa(0) = 1\,.$$

**Q2.** *La losanga $\mathcal{L}$ in figura è ottenuta asportando da una lamina quadrata omogenea di massa $4m$ e lato $4\ell$ quattro quadranti di raggio $2\ell$ centrati nei vertici del quadrato. Calcolare il momento centrale di inerzia $I_z$ di $\mathcal{L}$ lungo $\boldsymbol{e}_z$ .*




Il centro di massa di $\mathcal{L}$ coincide con il centro $O$ della lamina quadrata iniziale. Inoltre, la densità superficiale di massa $\sigma$ del quadrato è

$$\sigma = \frac{m}{4\ell^2}$$

Poichè i quattro quadranti $\mathcal{Q}_i$ $(i = 1, ..., 4)$ asportati sono simmetrici rispetto all'asse $\boldsymbol{e}_z$ passante per $O$, dal principio della lacuna abbiamo

$$I_{Oz}(\mathcal{L}) = \frac{32}{3}m\ell^2 - 4I_{Oz}(\mathcal{Q}_1)$$

dove il primo termine a destra dell'uguaglianza è il contributo della lamina quadrata mentre come quadrante di riferimento è stato scelto $\mathcal{Q}_1$, di centro nel vertice $A$. Poiché né $O$ né $A$ sono il centro di massa $G$ di $\mathcal{Q}_1$, applichiamo due volte il teorema di Huygens-Steiner per $\mathcal{Q}_1$ ottenendo

$$I_{Oz}(\mathcal{Q}_1) = I_{Gz}(\mathcal{Q}_1) + m_{\mathcal{Q}_1}|G - O|^2$$

e

$$I_{Az}(\mathcal{Q}_1) = I_{Gz}(\mathcal{Q}_1) + m_{\mathcal{Q}_1}|A - O|^2 \,,$$

dove $m_{\mathcal{Q}_1}$ è la massa di $\mathcal{Q}_1$. Sottraendo la seconda dalla prima equazione ed osservando che, per simmetria materiale $I_{Az}(\mathcal{Q}_1)$ è $1/4$ del momento centrale di inerzia lungo $\boldsymbol{e}_z$ per un disco di raggio $2\ell$ e massa $4m_{\mathcal{Q}_1}$ abbiamo, grazie anche al teorema di Pappo-Guldino

$$I_{Oz}(\mathcal{Q}_1) = 2m_{\mathcal{Q}_1}\ell^2 + m_{\mathcal{Q}_1}[|G - O|^2 - |G - A|^2] = m_{\mathcal{Q}_1}\ell^2[10 - \frac{64}{3\pi}] \,.$$

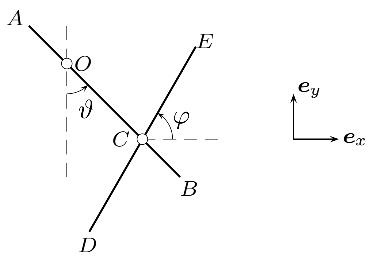
Infine, poichè

$$m_{\mathcal{Q}_1} = \sigma A(m_{\mathcal{Q}_1}) = \frac{\pi}{4}m$$

abbiamo

$$I_{Oz}(\mathcal{L}) = \frac{32}{3}m\ell^2 - 4I_{Oz}(\mathcal{Q}_1) = 32m\ell^2[1 - \frac{5\pi}{16}] \,.$$

**Q3.** *In un piano, un'asta omogenea $AB$ di massa $2m$ e lunghezza $\ell$ è libera di ruotare attorno ad un suo punto fisso $O$ distante $\ell/4$ da $A$. Incernierato nel punto $C$ di $AB$, distante $\ell/4$ da $B$, è il centro di una seconda asta omogenea $DE$, di massa e lunghezza pari a quelle di $AB$. Detti $\vartheta$ e $\varphi$ gli angoli di rotazione delle due aste, trovare il momento della quantità di moto rispetto ad $O$ quando $\dot\varphi = -\omega$ e $\dot\vartheta = 2\omega$.*




L'asta $AB$ ruota attorno al punto $O$ fisso con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_{AB} = \dot\vartheta\boldsymbol{e}_z$ ed ha pertanto momento della quantità di moto rispetto ad $O$

$$\boldsymbol{K}_O(AB) = \mathrm{I\!I}_O\boldsymbol{\omega}_{AB} = \frac{7}{24}m\ell^2\dot\vartheta\boldsymbol{e}_z \,.$$

L'asta $DE$ ruota con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_{DE} = \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_z$ attorno all'asse $\boldsymbol{e}_z$ passante per il centro di massa mobile $C$. Possiamo utilizzare il teorema del trasporto per scrivere

$$\boldsymbol{K}_O(DE) = \boldsymbol{K}_C(DE) + 2m\boldsymbol{v}_C \wedge (O - C)$$

ed usare l'espressione

$$\boldsymbol{K}_C(DE) = \mathbb{I}_C \boldsymbol{\omega}_{DE} = \frac{1}{6} m\ell^2 \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_z \,.$$

Il calcolo del termine correttivo nel teorema del trasporto si effettua facilmente introducendo la coppia di versori $\{\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\vartheta\}$ solidale ad $AB$ con $\boldsymbol{e}_r := \frac{B-O}{|B-O|}$ ed $\boldsymbol{e}_\vartheta$ versore nel piano $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y\}$ tale che $\boldsymbol{e}_r \wedge \boldsymbol{e}_\vartheta = \boldsymbol{e}_z$. Dalle formule di Poisson abbiamo allora

$$\dot{\boldsymbol{e}_r} = \boldsymbol{\omega}_{AB} \wedge \boldsymbol{e}_r = \dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_\vartheta \quad \text{e} \quad \dot{\boldsymbol{e}_\vartheta} = \boldsymbol{\omega}_{DE} \wedge \boldsymbol{e}_\vartheta = -\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_r \,.$$

Poichè $C - O = \frac{\ell}{2}\boldsymbol{e}_r$ abbiamo

$$\boldsymbol{v}_C = \frac{\ell}{2}\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_\vartheta$$

e dunque

$$2m\boldsymbol{v}_C \wedge (O - C) = -m\ell\boldsymbol{v}_C \wedge \boldsymbol{e}_r = \frac{1}{2} m\ell^2 \dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z \,.$$

Sommando i contributi ottenuti abbiamo

$$\boldsymbol{K}_O = [\frac{1}{6}\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_z + \frac{19}{24}\dot{\vartheta}] m\ell^2 \boldsymbol{e}_z \,.$$

Sostituendo i valori di $\dot{\vartheta}$ e di $\dot{\varphi}$ assegnati nel testo concludiamo che

$$\boldsymbol{K}_O = \frac{17}{24}\omega m\ell^2 \boldsymbol{e}_z \,.$$

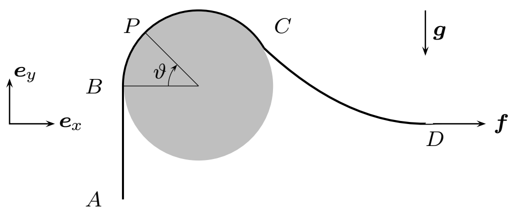
**Q4.** *In un piano verticale, un filo omogeneo $AD$ di lunghezza $17\pi R/6$ e peso per unità di lunghezza costante $2p/R$ è disposto come in Figura 3. Esso ha un tratto $AB$ verticale, un tratto $BC$ appoggiato senza attrito su un disco di raggio $R$ ed il tratto $CD$, tenuto in equilibrio da un'opportuna forza $\boldsymbol{f} = \beta p\boldsymbol{e}_x$. L'arco $BC$ sottende un angolo di $5\pi/6$. Trovare il valore di $\beta$ che garantisce l'equilibrio nelle condizioni indicate.*

Sul tratto $CD$ di filo, che ha la forma di un arco di catenaria ed ha lunghezza $\ell_{CD}$ incognita, agisce il peso $-2p\ell_{CD}/R\boldsymbol{e}_y$, la forza $\boldsymbol{f}$ e la tensione $\boldsymbol{\tau}_C$ in $C$. La condizione di equilibrio delle forze agenti su $CD$ richiede

$$\boldsymbol{\tau}_C + \beta p\boldsymbol{e}_x - 2p\ell_{CD}/R\boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{0}$$

da cui si ottiene

$$\tau_{Cx} = \beta p \quad \text{e} \quad \tau_{Cy} = 2p\ell_{CD}/R \,.$$




Le ocmponenti della tensione in $C$ sono legate dalla relazione

$$\tau_{Cy} = \tau_{Cx} \tan\frac{\pi}{6} = \beta p\sqrt{3}$$

che si ottiene richiedendo che $\boldsymbol{\tau}_C$ sia orientata lungo la tangente a $CD$ che è appunto inclinata di $\pi/6$ sull'orizzontale. Possiamo allora concludere che

$$\ell_{CD} = \frac{\beta\sqrt{3}}{2}R\,.$$

Passando ora al tratto $BC$ ed introdotto l'angolo $\vartheta$ illustrato in figura, la tensione nel generico punto $P$ del filo è

$$\tau(\vartheta) = \frac{2p}{R}\sin\vartheta + c$$

in quanto non cè attrito e la forza peso è conservativa. Per determinare la costante di integrazione $c$, ricordiamo che, per quanto visto sopra $|\tau_C| = 2\beta p$ e che $C$ corrisponde al valore $\vartheta = \frac{5\pi}{6}$ per ottenere

$$c = p[2\beta - 1]\,.$$

Pertanto in $B$, dove $\vartheta = 0$, la tensione è $\tau_B = p[2\beta - 1]$. D'altra parte, considerando il tratto $AB$ del filo vediamo che la tensione in $B$ deve equilibrare il peso $2p\ell_{AB}/R$ di $AB$, dove $\ell_{AB}$ è la lunghezza di $AB$ medesimo, per cui

$$\ell_{AB} = \frac{R}{2}[2\beta - 1]\,.$$

Poiché per la geometria del problema la lunghezza di $BC$ è $\frac{5\pi}{6}R$, stante la lunghezza totale del filo assegnata nel testo, $\beta$ risolve l'equazione

$$\frac{17\pi}{6}R = \frac{5\pi}{6}R + \frac{R}{2}[2\beta - 1] + \frac{\beta\sqrt{3}}{2}R$$

e dunque vale

$$\beta = \frac{4\pi + 1}{2 + \sqrt{3}}\,.$$