Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Esame di Meccanica Razionale
Appello del 20 settembre 2005
Soluzioni (Parte I)

Q1. *Trovare la curvatura κ della curva*

$$p(t) - o = 2t\cos t\boldsymbol{e}_x + \sqrt{2}t\sin t\boldsymbol{e}_y + \sqrt{2}t^2\cos t\boldsymbol{e}_z$$

nel punto corrispondente a $t = 0$.

Eseguendo due derivazioni rispetto al parametro t otteniamo

$$\dot{p} = 2(\cos t - t\sin t)\boldsymbol{e}_x + \sqrt{2}(\sin t + t\cos t)\boldsymbol{e}_y + \sqrt{2}(2t\cos t - t^2\sin t)\boldsymbol{e}_z$$

e

$$\ddot{p} = -2(2\sin t + t\cos t)\boldsymbol{e}_x + \sqrt{2}(2\cos t - t\sin t)\boldsymbol{e}_y + \sqrt{2}(2\cos t - 4t\sin t - t^2\cos t)\boldsymbol{e}_z$$

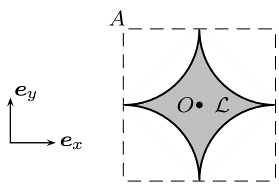
da cui segue

$$\dot{p}(0) = 2\boldsymbol{e}_x\,, \qquad \ddot{p}(0) = 2\sqrt{2}(\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z) \quad \text{e} \quad \dot{p}(0) \wedge \ddot{p}(0) = 4\sqrt{2}(\boldsymbol{e}_z - \boldsymbol{e}_y)$$

e dunque

$$\kappa(0) = 1\,.$$

Q2. *La losanga $\mathcal{L}$ in figura è ottenuta asportando da una lamina quadrata omogenea di massa $4m$ e lato 4ℓ quattro quadranti di raggio 2ℓ centrati nei vertici del quadrato. Calcolare il momento centrale di inerzia I_z di $\mathcal{L}$ lungo $\boldsymbol{e}_z$.*



Il centro di massa di $\mathcal{L}$ coincide con il centro O della lamina quadrata iniziale. Inoltre, la densità superficiale di massa σ del quadrato è

$$\sigma = \frac{m}{4\ell^2}$$

Poichè i quattro quadranti $\mathcal{Q}_i$ $(i = 1, ..., 4)$ asportati sono simmetrici rispetto all'asse $\boldsymbol{e}_z$ passante per O, dal principio della lacuna abbiamo

$$I_{Oz}(\mathcal{L}) = \frac{32}{3}m\ell^2 - 4I_{Oz}(\mathcal{Q}_1)$$

dove il primo termine a destra dell'uguaglianza è il contributo della lamina quadrata mentre come quadrante di riferimento è stato scelto $\mathcal{Q}_1$, di centro nel vertice A. Poiché né O né A sono il centro di massa G di $\mathcal{Q}_1$, applichiamo due volte il teorema di Huygens-Steiner per $\mathcal{Q}_1$ ottenendo

$$I_{Oz}(\mathcal{Q}_1) = I_{Gz}(\mathcal{Q}_1) + m_{\mathcal{Q}_1}|G - O|^2$$

e

$$I_{Az}(\mathcal{Q}_1) = I_{Gz}(\mathcal{Q}_1) + m_{\mathcal{Q}_1}|A - O|^2\,,$$

dove $m_{\mathcal{Q}_1}$ è la massa di $\mathcal{Q}_1$. Sottraendo la seconda dalla prima equazione ed osservando che, per simmetria materiale $I_{Az}(\mathcal{Q}_1)$ è $1/4$ del momento centrale di inerzia lungo $\boldsymbol{e}_z$ per un disco di raggio 2ℓ e massa $4m_{\mathcal{Q}_1}$ abbiamo, grazie anche al teorema di Pappo-Guldino

$$I_{Oz}(\mathcal{Q}_1) = 2m_{\mathcal{Q}_1}\ell^2 + m_{\mathcal{Q}_1}[|G - O|^2 - |G - A|^2] = m_{\mathcal{Q}_1}\ell^2[10 - \frac{64}{3\pi}]\,.$$

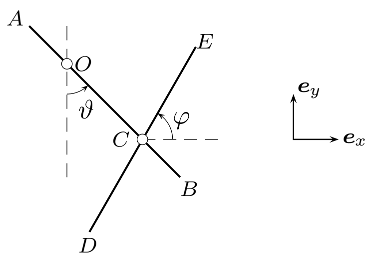
Infine, poichè

$$m_{\mathcal{Q}_1} = \sigma A(m_{\mathcal{Q}_1}) = \frac{\pi}{4}m$$

abbiamo

$$I_{Oz}(\mathcal{L}) = \frac{32}{3}m\ell^2 - 4I_{Oz}(\mathcal{Q}_1) = 32m\ell^2[1 - \frac{5\pi}{16}]\,.$$

Q3. *In un piano, un'asta omogenea AB di massa $2m$ e lunghezza ℓ è libera di ruotare attorno ad un suo punto fisso O distante $\ell/4$ da A. Incernierato nel punto C di AB, distante $\ell/4$ da B, è il centro di una seconda asta omogenea DE, di massa e lunghezza pari a quelle di AB. Detti ϑ e φ gli angoli di rotazione delle due aste, trovare il momento della quantità di moto rispetto ad O quando $\dot\varphi = -\omega$ e $\dot\vartheta = 2\omega$.*



L'asta AB ruota attorno al punto O fisso con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_{AB} = \dot\vartheta\boldsymbol{e}_z$ ed ha pertanto momento della quantità di moto rispetto ad O

$$\boldsymbol{K}_O(AB) = \mathrm{I\!I}_O\boldsymbol{\omega}_{AB} = \frac{7}{24}m\ell^2\dot\vartheta\boldsymbol{e}_z\,.$$

L'asta DE ruota con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_{DE} = \dot\varphi \boldsymbol{e}_z$ attorno all'asse $\boldsymbol{e}_z$ passante per il centro di massa mobile C. Possiamo utilizzare il teorema del trasporto per scrivere

$$\boldsymbol{K}_O(DE) = \boldsymbol{K}_C(DE) + 2m\boldsymbol{v}_C \wedge (O - C)$$

ed usare l'espressione

$$\boldsymbol{K}_C(DE) = \mathbb{I}_C \boldsymbol{\omega}_{DE} = \frac{1}{6} m\ell^2 \dot\varphi \boldsymbol{e}_z \,.$$

Il calcolo del termine correttivo nel teorema del trasporto si effettua facilmente introducendo la coppia di versori $\{\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\vartheta\}$ solidale ad AB con $\boldsymbol{e}_r := \frac{B-O}{|B-O|}$ ed $\boldsymbol{e}_\vartheta$ versore nel piano $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y\}$ tale che $\boldsymbol{e}_r \wedge \boldsymbol{e}_\vartheta = \boldsymbol{e}_z$. Dalle formule di Poisson abbiamo allora

$$\dot{\boldsymbol{e}_r} = \boldsymbol{\omega}_{AB} \wedge \boldsymbol{e}_r = \dot\vartheta \boldsymbol{e}_\vartheta \quad \text{e} \quad \dot{\boldsymbol{e}_\vartheta} = \boldsymbol{\omega}_{DE} \wedge \boldsymbol{e}_\vartheta = -\dot\vartheta \boldsymbol{e}_r \,.$$

Poichè $C - O = \frac{\ell}{2}\boldsymbol{e}_r$ abbiamo

$$\boldsymbol{v}_C = \frac{\ell}{2}\dot\vartheta \boldsymbol{e}_\vartheta$$

e dunque

$$2m\boldsymbol{v}_C \wedge (O - C) = -m\ell \boldsymbol{v}_C \wedge \boldsymbol{e}_r = \frac{1}{2} m\ell^2 \dot\vartheta \boldsymbol{e}_z \,.$$

Sommando i contributi ottenuti abbiamo

$$\boldsymbol{K}_O = [\frac{1}{6}\dot\varphi \boldsymbol{e}_z + \frac{19}{24}\dot\vartheta] m\ell^2 \boldsymbol{e}_z \,.$$

Sostituendo i valori di $\dot\vartheta$ e di $\dot\varphi$ assegnati nel testo concludiamo che

$$\boldsymbol{K}_O = \frac{17}{24}\omega m\ell^2 \boldsymbol{e}_z \,.$$

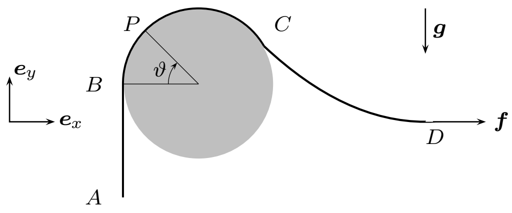
Q4. *In un piano verticale, un filo omogeneo AD di lunghezza $17\pi R/6$ e peso per unità di lunghezza costante $2p/R$ è disposto come in Figura 3. Esso ha un tratto AB verticale, un tratto BC appoggiato senza attrito su un disco di raggio R ed il tratto CD, tenuto in equilibrio da un'opportuna forza $\boldsymbol{f} = \beta p \boldsymbol{e}_x$. L'arco BC sottende un angolo di $5\pi/6$. Trovare il valore di β che garantisce l'equilibrio nelle condizioni indicate.*

Sul tratto CD di filo, che ha la forma di un arco di catenaria ed ha lunghezza ℓ_{CD} incognita, agisce il peso $-2p\ell_{CD}/R\boldsymbol{e}_y$, la forza $\boldsymbol{f}$ e la tensione $\boldsymbol{\tau}_C$ in C. La condizione di equilibrio delle forze agenti su CD richiede

$$\boldsymbol{\tau}_C + \beta p \boldsymbol{e}_x - 2p\ell_{CD}/R\boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{0}$$

da cui si ottiene

$$\tau_{Cx} = \beta p \quad \text{e} \quad \tau_{Cy} = 2p\ell_{CD}/R \,.$$



Le ocmponenti della tensione in C sono legate dalla relazione

$$\tau_{Cy} = \tau_{Cx} \tan \frac{\pi}{6} = \beta p \sqrt{3}$$

che si ottiene richiedendo che $\boldsymbol{\tau}_C$ sia orientata lungo la tangente a CD che è appunto inclinata di $\pi/6$ sull'orizzontale. Possiamo allora concludere che

$$\ell_{CD} = \frac{\beta\sqrt{3}}{2} R \,.$$

Passando ora al tratto BC ed introdotto l'angolo ϑ illustrato in figura, la tensione nel generico punto P del filo è

$$\tau(\vartheta) = \frac{2p}{R} \sin\vartheta + c$$

in quanto non cè attrito e la forza peso è conservativa. Per determinare la costante di integrazione c, ricordiamo che, per quanto visto sopra $|\tau_C| = 2\beta p$ e che C corrisponde al valore $\vartheta = \frac{5\pi}{6}$ per ottenere

$$c = p[2\beta - 1] \,.$$

Pertanto in B, dove $\vartheta = 0$, la tensione è $\tau_B = p[2\beta - 1]$. D'altra parte, considerando il tratto AB del filo vediamo che la tensione in B deve equilibrare il peso $2p\ell_{AB}/R$ di AB, dove ℓ_{AB} è la lunghezza di AB medesimo, per cui

$$\ell_{AB} = \frac{R}{2}[2\beta - 1] \,.$$

Poiché per la geometria del problema la lunghezza di BC è $\frac{5\pi}{6}R$, stante la lunghezza totale del filo assegnata nel testo, β risolve l'equazione

$$\frac{17\pi}{6} R = \frac{5\pi}{6} R + \frac{R}{2}[2\beta - 1] + \frac{\beta\sqrt{3}}{2} R$$

e dunque vale

$$\beta = \frac{4\pi + 1}{2 + \sqrt{3}} \,.$$