UNIVERSITÀ DI PAVIA
FACOLTÀ DI INGEGNERIA
***Esame di Meccanica Razionale (Parte II)***
*21 luglio 2005*

Il ***candidato*** scriva nello spazio sottostante il proprio Cognome e Nome.

**COGNOME** **NOME**

La seconda parte della ***prova*** consta di **4** Quesiti e durerà **2 *ore***. ***Non è permesso*** consultare testi od appunti, al di fuori di quelli distribuiti dalla Commissione.
La ***risposta*** a ciascuno di essi va scelta *esclusivamente* tra quelle già date nel testo, annerendo *un solo* circoletto ◯. Una sola è la risposta corretta. Qualora sia data più di una risposta allo stesso quesito, questa sarà considerata errata, anche se una delle risposte date è corretta.
I ***punteggi*** per ciascun quesito sono dichiarati in *trentesimi* sul testo, nel seguente formato

**{E,NE,A}**

dove **E** è il punteggio assegnato in caso di risposta *Esatta*, **NE** quello in caso di risposta *Non Esatta* e **A** quello in caso di risposta *Assente*. L'esito finale della prova è determinato dalla somma *algebrica* dei punteggi parziali.

**ESITO** | | |

## QUESITI

**Q1.** *Dato il tensore*

$$\mathbf{A} = 2\boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y \otimes \boldsymbol{e}_y + 2\boldsymbol{e}_z \otimes \boldsymbol{e}_z + \boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_y \otimes \boldsymbol{e}_z - \boldsymbol{e}_z \otimes \boldsymbol{e}_x$$

*ed i vettori* $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_z$ *e* $\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y + \gamma\boldsymbol{e}_z$*, per quale valore di* $\gamma$ $\mathbf{A}\,\boldsymbol{v}$ *è ortogonale a* $\boldsymbol{u}$*?*

**{5,-1,0}**

***Risposta***

◯ $\gamma = 1$ ◯ $\gamma = 2$ ◯ $\gamma = 3$ ◯ $\gamma = 4$ ◯ $\gamma = \frac{4}{3}$ ◯ $\gamma = \frac{5}{3}$ ◯ $\gamma = \frac{7}{3}$ ◯ $\gamma = \frac{8}{3}$

**Q2.** *In un piano verticale, un'asta omogenea di massa* $m$ *e lunghezza* $\ell$ *è libera di ruotare attorno ad un estremo* $O$*. Un anellino* $P$ *di massa* $2m$ *e dimensioni trascurabili può scorrere senza attrito lungo l'asta, ed è attratto verso* $O$ *da una molla ideale di costante elastica* $\frac{mg}{\ell}$*. Una seconda molla ideale, di costante elastica* $2\frac{mg}{\ell}$ *attira il secondo estremo* $A$ *dell'asta verso il punto* $B$ *sulla verticale per* $A$ *posto lungo una guida fissa orizzontale alla stessa quota di* $O$*. Siano* $s$ *l'ascissa di* $P$ *misurata lungo* $OA$*, con origine in* $O$*, e* $\vartheta$ *l'angolo che l'asta forma con l'orizzontale (vedi Figura 1). All'istante* $t = 0$ *si ha* $\vartheta(0) = \pi/6$, $s(0) = \ell/2$, $\dot{\vartheta}(0) = \dot{s}(0) = 0$*. Calcolare* $(\ddot{s}(0), \ddot{\vartheta}(0))$.

**{5,-1,0}**

***Risposta***

◯ $\left(\frac{g}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{g}{\ell}\right)$ ◯ $\left(\frac{g}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{g}{\ell}\right)$ ◯ $\left(\frac{g}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{5}\frac{g}{\ell}\right)$ ◯ $\left(\frac{g}{3}, \frac{5\sqrt{3}}{7}\frac{g}{\ell}\right)$
◯ $\left(\frac{g}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{10}\frac{g}{\ell}\right)$ ◯ $\left(\frac{g}{4}, \frac{9\sqrt{3}}{14}\frac{g}{\ell}\right)$ ◯ $\left(\frac{g}{3}, \frac{9\sqrt{3}}{17}\frac{g}{\ell}\right)$ ◯ $\left(\frac{g}{3}, \frac{12\sqrt{3}}{17}\frac{g}{\ell}\right)$

---

**Q3.** *Sia $\mathcal{B}$ un corpo esteso e siano $I_1$, $I_2$ ed $I_3$ i momenti centrali d'inerzia rispetto a $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, direzioni principali d'inerzia, con $0 < I_1 \le I_2 \le I_3$. Quale fra le seguenti affermazioni è* sempre *vera?*

**{5,-1,0}**

***Risposta***

◯ Non esistono altre direzioni principali d'inerzia all'infuori di $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$.
◯ Ogni combinazione lineare di $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ è una direzione principale d'inerzia.
◯ $I_3 = I_1 + I_2$.
◯ Dato un versore $\boldsymbol{n} = \alpha\boldsymbol{e}_1 + \beta\boldsymbol{e}_2$, si ha $I_3 = (\beta I_1 + \alpha I_2)$.
◯ Se $I_1 = I_2$ il corpo è un solido di rotazione.
◯ Se $I_1 = I_2 = I_3$ il corpo è una sfera.
◯ Se $I_1 = I_2 = I_3$ l'ellissoide centrale d'inerzia è una sfera
◯ $I_3 = \sqrt{I_1 I_2}$.

---

**Q4.** *In un piano verticale, un supporto fisso è costituito da una guida rettilinea scabra $CQ$ di coefficiente d'attrito statico $\mu = \sqrt{3}/3$, inclinato rispetto all'orizzontale di un angolo $\vartheta = \pi/6$, e da una guida priva d'attrito avente la forma di un arco $AQ$ di circonferenza di raggio $R$, raccordata con continuità della tangente in $Q$. Un filo $BP$ di densità lineare di massa $m/R$ e lunghezza $26\pi R/3$ è parzialmente appoggiato lungo $CQ$, e prosegue lungo la guida circolare in modo che si distacchi lungo la verticale in $A$. All'estremità $P$ del filo viene posto un contrappeso di massa $2\sqrt{3}m$. Sia $\gamma R$ la lunghezza del tratto $AP$ libero di filo (vedi figura 2). Qual è il massimo valore di $\gamma$ compatibile con l'equilibrio nelle condizioni descritte?*

**{5,-1,0}**

***Risposta***

◯ $4\pi - \sqrt{3}$ ◯ $4\pi - \frac{1}{\sqrt{3}}$ ◯ $4\pi - \frac{5\sqrt{3}}{4}$ ◯ $4\pi - \frac{5}{4\sqrt{3}}$
◯ $4\pi - \frac{7\sqrt{3}}{8}$ ◯ $4\pi - \frac{7}{8\sqrt{3}}$ ◯ $4\pi - \frac{11\sqrt{3}}{12}$ ◯ $4\pi - \frac{11}{12\sqrt{3}}$

---

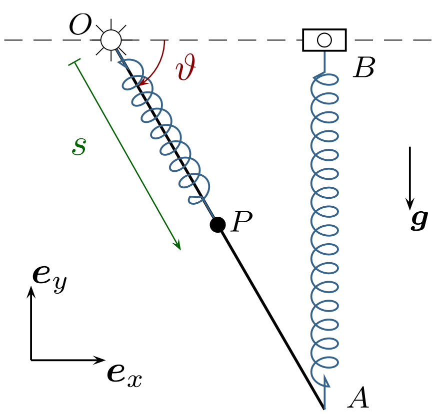


Fig. 1

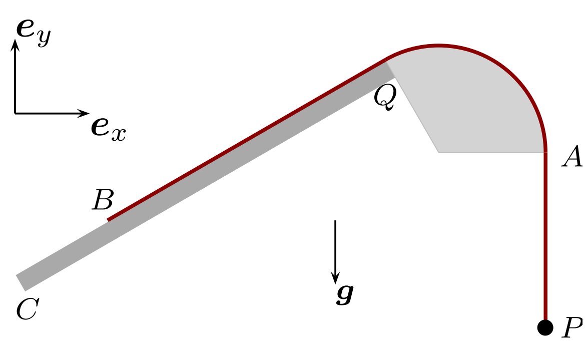


Fig. 2