Università di Pavia - Facoltà di Ingegneria

Esame di Meccanica Razionale - *22 febbraio 2007*

COGNOME **NOME**

La ***prova*** consta di **3** Quesiti a risposta chiusa e **2** Quesiti a risposta semiaperta; la durata della prova è di 2 ore e 30 minuti. ***Non è permesso*** consultare testi od appunti, al di fuori di quelli distribuiti dalla Commissione.
Per i quesiti a risposta chiusa, la ***risposta*** a ciascuno di essi va scelta *esclusivamente* tra quelle già date nel testo, annerendo *un solo* circoletto ◯. Una sola è la risposta corretta. Qualora sia data più di una risposta allo stesso quesito, nessuna sarà considerata valida. Per i quesiti a risposta semiaperta, lo studente dovrà indicare la risposta nello spazio sottostante la domanda. I ***punteggi*** per ciascun quesito sono dichiarati sul testo, nel seguente formato **{E,NE,A}** dove **E** è il punteggio assegnato in caso di risposta *Esatta*, **NE** quello in caso di risposta *Non Esatta* e **A** quello in caso di risposta *Assente*. L'esito finale della prova è determinato dalla somma *algebrica* dei punteggi parziali.

ESITO | | |

Ai sensi del D. Lgs. 30/06/2003, n. 196, si autorizza la pubblicazione online in chiaro dell'esito della prova.
FIRMA:

QUESITI A RISPOSTA CHIUSA

QC1. *Trovare la curvatura κ della curva*

$$p(t) - O = \cos^2 t\boldsymbol{e}_x + \sqrt{2}\sin t\boldsymbol{e}_y + \sqrt{2}te^t\boldsymbol{e}_z$$

nel punto corrispondente a $t = 0$.

{6,-1,0}

Risposta

◯ $\kappa = \frac{\sqrt{7}}{4}$ ◯ $\kappa = \frac{\sqrt{19}}{4}$ ◯ $\kappa = 1$ ♠ $\kappa = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ◯ $\kappa = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{14}{3}}$ ◯ $\kappa = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$

QC2. *Ad una lamina omogenea quadrata $ABCD$ di massa $2m$ e lato 4ℓ viene asportata una porzione rettangolare $EFGH$, con EF di lunghezza ℓ e FG di lunghezza pari a metà di uno dei lati del quadrato e posto su di esso in modo che $CE = BH$ (Figura 1). Calcolare il momento centrale di inerzia I_z del corpo così ottenuto rispetto alla direzione $\boldsymbol{e}_z := \boldsymbol{e}_x \wedge \boldsymbol{e}_y$ ortogonale al piano della lamina.*

{6,-1,0}

Risposta

◯ $\frac{4247}{792}m\ell^2$ ◯ $\frac{4247}{198}m\ell^2$ ◯ $\frac{1541}{224}m\ell^2$ ♠ $\frac{1541}{336}m\ell^2$ ◯ $\frac{1807}{180}m\ell^2$ ◯ $\frac{1807}{120}m\ell^2$

QC3. *Per un corpo rigido $\mathcal{B}$, sia $\boldsymbol{v}_C$ la velocità del centro di massa di $\mathcal{B}$, $\boldsymbol{v}_O$ la velocità di un altro suo punto O ed $\boldsymbol{\omega}$ la sua velocità angolare; sia, inoltre, $\boldsymbol{R}$ il risultante di un sistema di forze, ed $\boldsymbol{M}_P$ il momento risultante dello stesso sistema di forze rispetto ad un generico punto P.*

Quale fra le seguenti espressioni per la potenza complessiva W del sistema di forze è sempre vera?

{6,-1,0}

Soluzione

♠ $W = \boldsymbol{v}_O \cdot \boldsymbol{R} + \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{M}_O$ ◯ $W = \boldsymbol{v}_O \cdot \boldsymbol{R} + \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{M}_C$
◯ $W = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}_0^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbb{I}_O\boldsymbol{\omega}$ ◯ $W = \boldsymbol{R} \wedge \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{M}_O \wedge \boldsymbol{\omega}$
◯ $W = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{R} \wedge \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{v}_C \cdot \boldsymbol{M}_O \wedge \omega$ ◯ Nessuna delle precedenti

QUESITI A RISPOSTA SEMIAPERTA

QA1. *In un piano verticale, un disco di massa m e raggio $R = \ell$ è vincolato a rotolare senza strisciare lungo una guida orizzontale; un'asta di massa trascurabile e lunghezza $4R$ ha un estremo libero di ruotare attorno al centro C del disco, e reca all'altra estremità P un corpo puntiforme di massa m. Una molla ideale di lunghezza a riposo nulla e costante elastica $mg/4\ell$ attrae C verso un punto fisso O posto sulla medesima quota. Nelle risposte si utilizzino le coordinate lagrangiane indicate in Figura 2.*

1. Fornire l'espressione dell'energia potenziale totale del sistema: **{2,0,0}** $V = \frac{1}{8}\frac{mg}{\ell}x^2 - 4mg\ell\cos\vartheta$

---

2. Fornire l'espressione dell'energia cinetica totale del sistema: **{3,0,0}** $T = 8m\ell^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{5}{4}m\dot{x}^2 + 4m\ell\dot{\boldsymbol{x}}\dot{\vartheta}\cos\vartheta$

---

3. Calcolare le frequenze delle piccole oscillazioni in un intorno della posizione di equilibrio stabile. **{4,0,0}**
   $\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{\frac{g}{\ell}}$

QA2. *La struttura rigida riportata in Figura 3 è composta da due aste: AC di lunghezza 6ℓ e peso mg e MB di peso trascurabile, avente forma di un arco di circonferenza di ampiezza $\pi/3$ centrato in A e raggio $R = \overline{AC}/2$, incernierata alla prima in M, punto medio di AC. La struttura è vincolata a terra da due cerniere in A e B, poste alla stessa quota a distanza R. In C agisce una forza $\boldsymbol{f} = -2mg\boldsymbol{e}_x$.*

1. Calcolare il modulo della reazione vincolare in M **{2,0,0}** $\frac{1}{3}(12-\sqrt{3})mg$

---

2. Sia $\boldsymbol{\Phi}$ la reazione vincolare in A; calcolare $\Phi_x = \boldsymbol{\Phi}\cdot\boldsymbol{e}_x$ **{2,0,0}** e $\Phi_y = \boldsymbol{\Phi}\cdot\boldsymbol{e}_y$ **{2,0,0}** $(\frac{1}{2\sqrt{3}}\boldsymbol{e}_x + (\frac{1}{2} + 2\sqrt{3})\boldsymbol{e}_y)mg$

---

3. Determinare il valore assoluto del momento flettente agente nel punto medio di BM. **{3,0,0}**
   $\frac{1}{2}(2-\sqrt{3})(12-\sqrt{3})mg\ell = \frac{27}{2} - 7\sqrt{3}mg\ell$

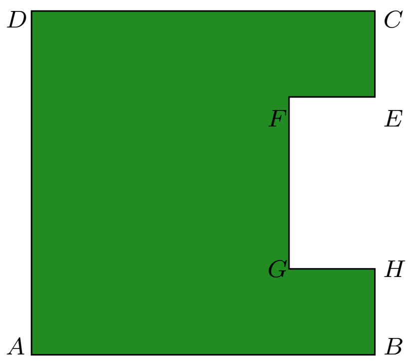

Fig. 1

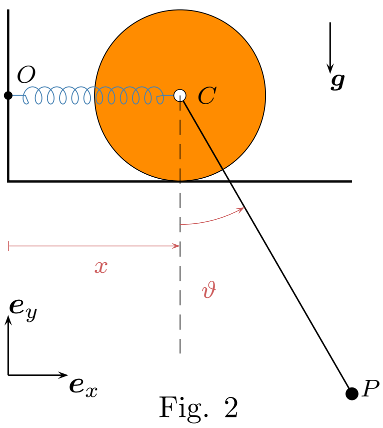

Fig. 2

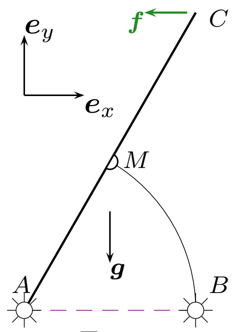

Fig. 3