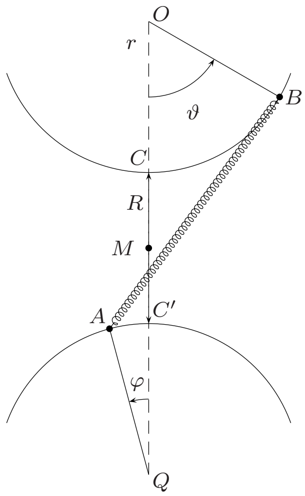
Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Esame di Meccanica Razionale
Appello del 22 giugno 2005
Soluzioni (Parte I)

Q1. *In un piano* **orizzontale**, *due punti materiali A e B si muovono senza attrito lungo due archi di circonferenza, entrambi di raggio R, aventi distanza R. Il punto A ha massa $6m$, B ha massa m ed i punti sono uniti da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Dette ω_M ed ω_m la maggiore e la minore frequenza delle piccole oscillazioni in un intorno della configurazione di minimo assoluto dell'energia potenziale, trovare il valore del rapporto $\Omega := \omega_M/\omega_m$.*



La sola forza attiva presente è quella elastica, la cui energia potenziale è

$$V = \frac{k}{2}|B - A|^2 .$$

Il minimo assoluto di V si realizza quando A e B sono sulla retta r indicata in figura. Sia ϑ l'angolo, contato in senso antiorario, compreso tra r ed il raggio OB e φ l'angolo, sempre contato in verso antiorario, compreso tra r ed il raggio AQ. La configurazione di equilibrio da studiare corrisponde ai valori $\vartheta = \varphi = 0$. Preso come origine di un sistema piano di coordinate cartesiane il punto medio M del segmento CC', abbiamo

$$B - M = R\sin\vartheta \boldsymbol{e}_x + R(\frac{3}{2} - \cos\vartheta)\boldsymbol{e}_y \quad \text{e} \quad A - M = -R\sin\varphi \boldsymbol{e}_x - R(\frac{3}{2} - \cos\varphi)\boldsymbol{e}_y .$$

Per studiare i modi normali occorre procurarsi le forme quadratiche associate a V ed all'energia cinetica T corrispondenti alla configurazione richiesta. Poiché la configurazione è già nota ed è descritta da valori semplici delle coordinate generalizzate scelte possiamo, invece di trovare $|B-A|^2$ in funzione di ϑ e φ, calcolare le derivate seconde di V e poi inserire i valori $\vartheta=\varphi=0$, seguire una via alternativa. Sviluppiamo $|B-A|^2$ in serie di Mac Laurin fino al secondo ordine, dai coefficienti della forma quadratica che descrive V al secondo ordine, risalire alla matrice hessiana. Trascurando termini di ordine superiore al secondo in ϑ e φ, abbiamo

$$B \equiv (R\vartheta, \frac{R}{2}(1+\vartheta^2)) \qquad A \equiv (-R\varphi, -\frac{R}{2}(1+\varphi^2))$$

da cui segue

$$|B-A|^2 = R^2[(\vartheta+\varphi)^2 + \frac{1}{4}(2+\vartheta^2+\varphi^2)^2] = 2R^2[\vartheta^2+\varphi^2+\vartheta\varphi] + R^2\,.$$

Trascurando termini costanti, l'espressione approssimata di V è

$$V = kR^2[\vartheta^2+\varphi^2+\vartheta\varphi] + O(2)\,,$$

Dove la scrittura $O(2)$ ricorda che sono stati trascurati termini di ordine superiore al secondo in ϑ e φ. Per quanto riguarda l'energia cinetica, è sufficiente osservare che entrambi i punti eseguono un moto circolare per concludere che $v_A^2 = R^2\dot{\vartheta}^2$ e $v_B^2 = R^2\dot{\varphi}^2$ e dunque ricavare che

$$T = mR^2(3\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2)\,.$$

La forma quadratica associata all'energia cinetica è

$$A = \begin{pmatrix} 6mR^2 & 0 \\ 0 & mR^2 \end{pmatrix}$$

mentre la forma hessiana di V nella configurazione di equilibrio da studiare è

$$B = \begin{pmatrix} 2kR^2 & kR^2 \\ kR^2 & 2kR^2 \end{pmatrix}\,.$$

Risolvendo l'equazione $\det(\lambda A - B) = 0$ troviamo il rapporto Ω richiesto nel testo

$$\Omega = \left[\frac{7+\sqrt{31}}{7-\sqrt{31}}\right]^{1/2}\,.$$

Q2. *Scrivere l'equazione dell'asse centrale del seguente sistema di vettori applicati piani:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = 2\boldsymbol{e}_y & \textit{applicato in } P_1 - O \equiv (1,1,0), \\ \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{e}_x & \textit{applicato in } P_2 - O \equiv (1,-1,0), \\ \boldsymbol{v}_3 = 2\boldsymbol{e}_y & \textit{applicato in } P_3 - O \equiv (-1,-1,0). \\ \boldsymbol{v}_4 = -2\boldsymbol{e}_x & \textit{applicato in } P_4 - O \equiv (-1,1,0), \end{cases}$$

.

Il risultante del sistema è

$$\boldsymbol{R} = -\boldsymbol{e}_x + 4\boldsymbol{e}_y$$

ed il momento risultante rispetto ad O è

$$\boldsymbol{M}_O = 3\boldsymbol{e}_z\,.$$

L'asse centrale è il luogo dei punti $Q \equiv (x, y)$ tali che

$$Q - O = \frac{\boldsymbol{R} \wedge \boldsymbol{M}_O}{R^2} + \lambda \boldsymbol{R} = \frac{3}{17}(\boldsymbol{e}_y + 4\boldsymbol{e}_x) + \lambda(-\boldsymbol{e}_x + 4\boldsymbol{e}_y)$$

da cui segue l'equazione parametrica

$$\begin{cases} x = \frac{12}{17} - \lambda \\ y = \frac{3}{17} + 4\lambda \end{cases}$$

e quella cartesiana

$$y = -4x + 3\,.$$

Q3. *Un corpo rigido esteso $\mathcal{B}$ ha massa $M \neq 0$. Quale tra le seguenti affermazioni rigurdante il suo tensore di inerzia $\mathbb{I}_O$ rispetto ad un punto O è sicuramente corretta?*

{5,-1,0}

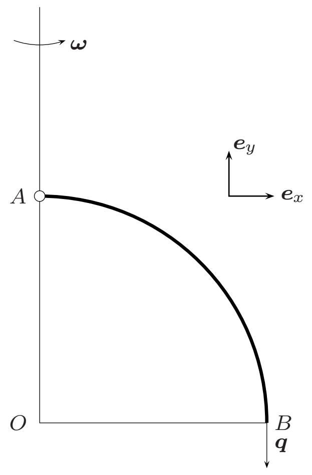
Risposta

◯ Il numero massimo di autovalori nulli di $\mathbb{I}_O$ è uno.
◯ $\mathbb{I}_O$ non può mai avere autovalori nulli.
◯ Il segno degli autovalori di $\mathbb{I}_O$ dipende dalla scelta di $\mathcal{B}$.
◯ $\mathbb{I}_O$ ha sempre tre autovalori distinti.
◯ Per una scelta opportuna di O, $\mathbb{I}_O$ può avere due autovalori nulli.
◯ Nessuna delle precedenti

I tensori di inerzia sono definiti positivi, con l'eccezione di quelli relativi a distribuzioni rettilinee di massa, come le aste omogenee, i quali hanno un autovalore nullo e gli altri positivi. La risposta corretta è:

Il numero massimo di autovalori nulli di $\mathbb{I}_O$ è uno.

Q4. *Un filo inestendibile di densità lineare di massa $3m/R$ e lunghezza $\pi R/2$ è appoggiato senza attrito ad un quadrante di raggio R. L'estremo A del filo è fissato al bordo del quadrante, mentre l'estremo B è sollecitato da un carico concentrato $\boldsymbol{q} = -\alpha m g \boldsymbol{e}_y$. Supponendo trascurabile la gravità, trovare per quali valori di α il filo resta sempre a contatto con il quadrante se quest'ultimo viene messo in rotazione con velocità angolare costante $\boldsymbol{\omega} = 2\sqrt{g/R}\boldsymbol{e}_y$ attorno all'asse OA.*



In assenza di gravità, l'unica sollecitazione da considerare è la forza centrifuga, che sappiamo essere conservativa. Sia ϑ l'angolo formato con la verticale dal raggio OP congiungente O con un punto qualsiasi P del filo. Poiché l'energia potenziale specifica in P è

$$v = -16mg\sin^2\vartheta\,,$$

la tensione in P è

$$\tau = -16mg\sin^2\vartheta + c$$

con c costante da determinare imponendo la condizione al contorno $\tau(B) \equiv \tau(\frac{\pi}{2}) = \alpha mg$. Svolti i calcoli, si ottiene

$$\tau = 16mg\cos^2\vartheta + \alpha mg\,.$$

La condizione di contatto impone che la componente ϕ_n della reazione vincolare specifica lungo la normale principale $\boldsymbol{n}$ (entrante nel supporto) sia negativa. Dall'equazione di equilibrio indefinita dei fili abbiamo

$$\phi_n = -\frac{\tau}{R} - f_n \leq 0$$

dove $f_n = -\frac{32m}{R}g\sin^2\vartheta$ è la proiezione lungo $\boldsymbol{n}$ della forza centrifuga per unità di lunghezza. La condizione di contatto diventa così

$$\frac{16}{R}mg\cos^2\vartheta + \alpha\frac{mg}{R} - \frac{32m}{R}g\sin^2\vartheta = \alpha\frac{mg}{R} + \frac{16m}{R}g - \frac{48m}{R}g\sin^2\vartheta \geq 0$$

per tutti i $\vartheta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Pertanto, deve essere

$$\alpha \geq 32\,.$$