*Università di Pavia*
*Facoltà di Ingegneria*
Esame di Meccanica Razionale
Appello del 22 luglio 2004
**Soluzioni (Parte I)**

**Q1.** *Dati i vettori:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{e}_x - 2\boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{e}_y + 2\boldsymbol{e}_z \\ \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y + 2\boldsymbol{e}_z \end{cases}$$

*trovare il valore di* $\boldsymbol{v}_3 \cdot (\boldsymbol{v}_1 \otimes \boldsymbol{v}_2)\boldsymbol{v}_3$.

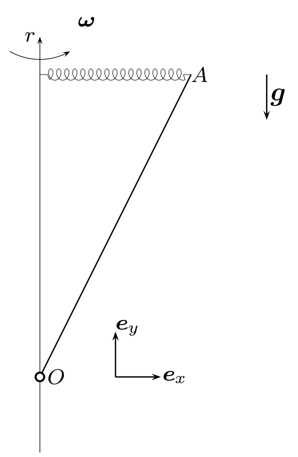
Poiché

$$\boldsymbol{v}_3 \cdot (\boldsymbol{v}_1 \otimes \boldsymbol{v}_2)\boldsymbol{v}_3 = (\boldsymbol{v}_3 \cdot \boldsymbol{v}_1)(\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{v}_3)$$

abbiamo

$$\boldsymbol{v}_3 \cdot (\boldsymbol{v}_1 \otimes \boldsymbol{v}_2)\boldsymbol{v}_3 = 9\,.$$

**Q2.** *In un piano verticale, un'asta omogenea* $OA$ *di lunghezza* $\ell$ *e massa* $2m$ *è incernierata in* $O$ *ad un punto fisso appartenente ad una retta verticale* $r$*. L'estremo* $A$ *dell'asta è attratto verso* $r$ *da una molla di costante elastica* $\frac{3mg}{2\ell}$ *che deve restare sempre in orizzontale. Se il piano contenente* $r$ *ed* $OA$ *ruota attorno ad* $r$ *con velocità angolare costante* $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{e}_y$*, trovare il minimo valore di* $\omega$ *a partire dal quale la configurazione in cui* $OA$ *è verticale, con* $O$ *al di sotto di* $A$*, cessa di essere configurazione di equilibrio stabile.*




Indichiamo con $\vartheta$ l'angolo compreso tra $r$ e l'asta. Dobbiamo discutere la stabilità della configurazione di equilibrio in cui $\vartheta = 0$. Nel sistema rotante occorre considerare i contributi all'energia potenziale dovuti alla forza peso, alla molla ed alla forza centrifuga. Il primo, presa come quota di riferimento quella di $O$, è $mg\ell\cos\vartheta$. Il contributo della forza elastica è $\frac{3}{4}mg\ell\sin^2\vartheta$. Infine, il contributo della forza centrifuga è dato da

$$-\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbb{I}_O\boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{2}\omega^2\boldsymbol{e}_y\cdot\mathbb{I}_O\boldsymbol{e}_y\,.$$

Occorre dunque calcolare il momento di inerzia dell'asta rispetto ad $r$. Applicando il teorema di Huygens-Steiner otteniamo

$$\boldsymbol{e}_y\cdot\mathbb{I}_O\boldsymbol{e}_y = \frac{2}{3}m\ell^2\boldsymbol{e}_y\cdot(\mathbf{I}-\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{e})\boldsymbol{e}_y$$

dove $\boldsymbol{e}$ è il versore associato ad $OA$. In termini di $\vartheta$ abbiamo

$$\boldsymbol{e}_y\cdot\mathbb{I}_O\boldsymbol{e}_y = \frac{2}{3}m\ell^2\sin^2\vartheta\,.$$

Pertanto, l'energia potenziale complessiva $V$ è data da

$$V = mg\ell\cos\vartheta + \frac{3}{4}mg\ell\sin^2\vartheta - \frac{1}{3}m\omega^2\ell^2\sin^2\vartheta$$

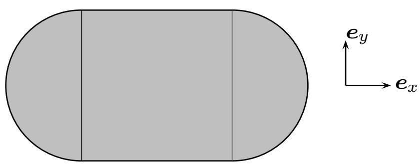
Annullando la derivata prima di $V$ è possibile verificare che $\vartheta = 0$ è effettivamente una configurazione di equilibrio. Per discuterne la stabilità occorre studiare il segno di $V''(0)$. La configurazione è instabile se

$$V''(0) = -mg\ell + \frac{3}{2}mg\ell - \frac{2}{3}m\omega^2\ell^2 < 0$$

che si verifica per

$$\omega > \sqrt{\frac{3g}{4\ell}}\,.$$

**Q3.** *Ad una lamina omogenea quadrata di massa $\alpha m$ e lato $2\ell$ vengono saldati due semidischi omogenei, entrambi di massa $\beta m$ e raggio $\ell/2$, in modo da formare la lamina piana $\mathcal{L}$ riportata in figura. Trovare il momento centrale di inerzia di $\mathcal{L}$ nella direzione $\boldsymbol{e}_x$.*




Per simmetria materiale, il centro di massa della lamina coincide con il centro del quadrato. Se osserviamo che, traslando idealmente i due semidischi nella direzione $\boldsymbol{e}_x$ fino a farne coincidere i diametri non cambia il momento di inerzia nella direzione $\boldsymbol{e}_x$, abbiamo che il momento di inerzia richiesta si ottiene sommando al momento centrale di inerzia del quadrato $\frac{1}{2}m\ell^2$ lungo $\boldsymbol{e}_x$, l'analoga quantità per un disco di massa $12m$ e raggio $\ell/2$ che vale $\frac{3}{4}m\ell^2$. Pertanto, il momento di inerzia richiesto vale $\frac{5}{4}m\ell^2$.

**Q4.** *Un sistema meccanico è descritto da coordinate generalizzate* $\{q_i\}$ *ed ha lagrangiana* $L$. *Quale, tra le seguenti, è la forma corretta delle equazioni di moto di* Lagrange *del sistema?*

○ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ ○ $\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ ○ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$

○ $\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ ○ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ ○ Nessuna delle precedenti

La risposta corretta è

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0\,.$$