Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Esame di Meccanica Razionale
Appello del 22 luglio 2004
Soluzioni (Parte I)

Q1. *Dati i vettori:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{e}_x - 2\boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{e}_y + 2\boldsymbol{e}_z \\ \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y + 2\boldsymbol{e}_z \end{cases}$$

trovare il valore di $\boldsymbol{v}_3 \cdot (\boldsymbol{v}_1 \otimes \boldsymbol{v}_2)\boldsymbol{v}_3$.

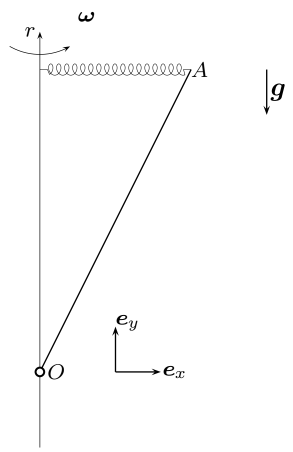
Poiché

$$\boldsymbol{v}_3 \cdot (\boldsymbol{v}_1 \otimes \boldsymbol{v}_2)\boldsymbol{v}_3 = (\boldsymbol{v}_3 \cdot \boldsymbol{v}_1)(\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{v}_3)$$

abbiamo

$$\boldsymbol{v}_3 \cdot (\boldsymbol{v}_1 \otimes \boldsymbol{v}_2)\boldsymbol{v}_3 = 9\,.$$

Q2. *In un piano verticale, un'asta omogenea OA di lunghezza ℓ e massa $2m$ è incernierata in O ad un punto fisso appartenente ad una retta verticale r. L'estremo A dell'asta è attratto verso r da una molla di costante elastica $\frac{3mg}{2\ell}$ che deve restare sempre in orizzontale. Se il piano contenente r ed OA ruota attorno ad r con velocità angolare costante $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{e}_y$, trovare il minimo valore di ω a partire dal quale la configurazione in cui OA è verticale, con O al di sotto di A, cessa di essere configurazione di equilibrio stabile.*



Indichiamo con ϑ l'angolo compreso tra r e l'asta. Dobbiamo discutere la stabilità della configurazione di equilibrio in cui $\vartheta = 0$. Nel sistema rotante occorre considerare i contributi all'energia potenziale dovuti alla forza peso, alla molla ed alla forza centrifuga. Il primo, presa come quota di riferimento quella di O, è $mg\ell\cos\vartheta$. Il contributo della forza elastica è $\frac{3}{4}mg\ell\sin^2\vartheta$. Infine, il contributo della forza centrifuga è dato da

$$-\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbb{I}_O\boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{2}\omega^2\boldsymbol{e}_y\cdot\mathbb{I}_O\boldsymbol{e}_y\,.$$

Occorre dunque calcolare il momento di inerzia dell'asta rispetto ad r. Applicando il teorema di Huygens-Steiner otteniamo

$$\boldsymbol{e}_y\cdot\mathbb{I}_O\boldsymbol{e}_y = \frac{2}{3}m\ell^2\boldsymbol{e}_y\cdot(\mathbf{I}-\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{e})\boldsymbol{e}_y$$

dove $\boldsymbol{e}$ è il versore associato ad OA. In termini di ϑ abbiamo

$$\boldsymbol{e}_y\cdot\mathbb{I}_O\boldsymbol{e}_y = \frac{2}{3}m\ell^2\sin^2\vartheta\,.$$

Pertanto, l'energia potenziale complessiva V è data da

$$V = mg\ell\cos\vartheta + \frac{3}{4}mg\ell\sin^2\vartheta - \frac{1}{3}m\omega^2\ell^2\sin^2\vartheta$$

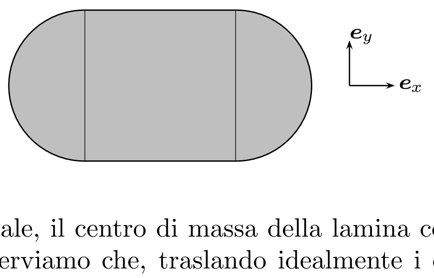
Annullando la derivata prima di V è possibile verificare che $\vartheta = 0$ è effettivamente una configurazione di equilibrio. Per discuterne la stabilità occorre studiare il segno di $V''(0)$. La configurazione è instabile se

$$V''(0) = -mg\ell + \frac{3}{2}mg\ell - \frac{2}{3}m\omega^2\ell^2 < 0$$

che si verifica per

$$\omega > \sqrt{\frac{3g}{4\ell}}\,.$$

Q3. *Ad una lamina omogenea quadrata di massa αm e lato 2ℓ vengono saldati due semidischi omogenei, entrambi di massa βm e raggio $\ell/2$, in modo da formare la lamina piana $\mathcal{L}$ riportata in figura. Trovare il momento centrale di inerzia di $\mathcal{L}$ nella direzione $\boldsymbol{e}_x$.*



Per simmetria materiale, il centro di massa della lamina coincide con il centro del quadrato. Se osserviamo che, traslando idealmente i due semidischi nella direzione $\boldsymbol{e}_x$ fino a farne coincidere i diametri non cambia il momento di inerzia nella direzione $\boldsymbol{e}_x$, abbiamo che il momento di inerzia richiesta si ottiene sommando al momento centrale di inerzia del quadrato $\frac{1}{2}m\ell^2$ lungo $\boldsymbol{e}_x$, l'analoga quantità per un disco di massa $12m$ e raggio $\ell/2$ che vale $\frac{3}{4}m\ell^2$. Pertanto, il momento di inerzia richiesto vale $\frac{5}{4}m\ell^2$.

Q4. *Un sistema meccanico è descritto da coordinate generalizzate $\{q_i\}$ ed ha lagrangiana L. Quale, tra le seguenti, è la forma corretta delle equazioni di moto di* Lagrange *del sistema?*

○ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ ○ $\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ ○ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$
○ $\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ ○ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ ○ Nessuna delle precedenti

La risposta corretta è

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0\,.$$