Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Esame di Meccanica Razionale
Appello del 22 luglio 2004
Soluzioni: parte II

Q1. *Trovare la curvatura κ della curva*

$$p(t) - O = \sin 2t\boldsymbol{e}_x + e^{t^2}\boldsymbol{e}_y + \cos t\boldsymbol{e}_z \qquad\qquad t \in [0, \pi]$$

nel punto corrispondente a $t = 0$.

Per risolvere il quesito, occorre calcolare le derivate prima e seconda di $p(t)$:

$$\dot{p}(t) = 2\cos 2t\boldsymbol{e}_x + 2te^{t^2}\boldsymbol{e}_y - \sin t\boldsymbol{e}_z \tag{1a}$$

$$\ddot{p}(t) = -4\sin 2t\boldsymbol{e}_x + 2e^{t^2}(1 + 2t^2)\boldsymbol{e}_y - \cos t\boldsymbol{e}_z\,, \tag{1b}$$

che, nel punto $t = 0$ assumono i valori

$$\dot{p}(0) = 2\boldsymbol{e}_x \tag{2a}$$

$$\ddot{p}(0) = 2\boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_z\,. \tag{2b}$$

Si ha, quindi:

$$\dot{p}(0) \wedge \ddot{p}(0) = 2\boldsymbol{e}_y + 4\boldsymbol{e}_z\,; \tag{3}$$

la curvatura $\kappa(0)$ è data dalla formula

$$\kappa(0) = \frac{|\dot{p}(0) \wedge \ddot{p}(0)|}{|\dot{p}(0)|^3}\,. \tag{4}$$

Sostituendo le (2) e la (3) in (4) otteniamo

$$\kappa(0) = \frac{\sqrt{5}}{4}\,. \tag{5}$$

Q2. *In un piano, l'estremo A di un'asta di massa $3m$ e lunghezza $2R$ è libero di scorrere lungo un asse, lasciando l'asta libera di ruotare attorno ad A; nell'altro estremo C si trova incernierato il centro di un disco omogeneo di massa m e raggio R (Figura 1). Esprimere l'energia cinetica totale del sistema in un atto di moto generico.*

Sia G il centro di massa dell'asta (Figura 1); il vettore che ne individua la posizione è:

$$G - O = (x + R\sin\vartheta)\boldsymbol{e}_x - R\cos\vartheta\boldsymbol{e}_y\,; \tag{6}$$

analogamente, la posizione del centro di massa del disco C è individuata dal vettore:

$$C - O = (x + 2R\sin\vartheta)\boldsymbol{e}_x - 2R\cos\vartheta\boldsymbol{e}_y\,. \tag{7}$$

Dalle (6) e (7) ricaviamo le velocità dei due centri di massa, $\boldsymbol{v}_G$ e $\boldsymbol{v}_G$:

$$\boldsymbol{v}_G = (\dot{x} + R\dot{\vartheta}\cos\vartheta)\boldsymbol{e}_x + R\dot{\vartheta}\sin\vartheta\boldsymbol{e}_y \tag{8a}$$

$$\boldsymbol{v}_C = (\dot{x} + 2R\dot{\vartheta}\cos\vartheta)\boldsymbol{e}_x + 2R\dot{\vartheta}\sin\vartheta\boldsymbol{e}_y\,. \tag{8b}$$

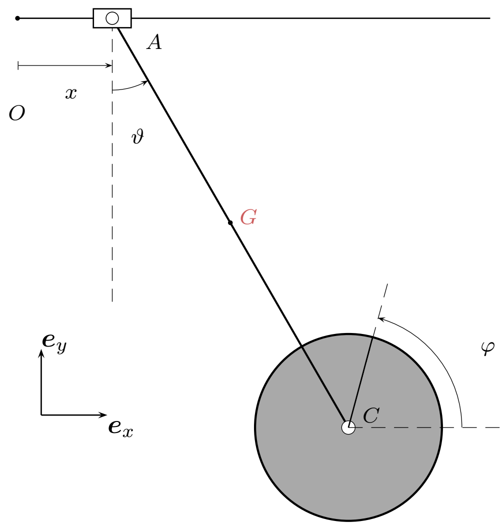

Fig. 1

Applicando il teorema di König per i due corpi, riducendo la formula al punto G e al punto C, rispettivamente, possiamo scrivere l'energia cinetica totale del sistema T:

$$\begin{aligned} T =& \frac{1}{2}(3m)v_G^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_a \cdot \mathbb{I}_G \boldsymbol{\omega}_a \\ &+ \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_d \cdot \mathbb{I}_C \boldsymbol{\omega}_d \,, \end{aligned} \tag{9}$$

dove $\boldsymbol{\omega}_a = \dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z$ è la velocità angolare dell'asta, $\boldsymbol{\omega}_d = \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_z$ è la velocità angolare del disco, $\mathbb{I}_G$ e $\mathbb{I}_C$ i due tensori centrali d'inerzia dei due corpi, rispettivamente.

Sostituendo le (8) nella (9) otteniamo:

$$\begin{aligned} T =& \frac{1}{2}3m(\dot{x}^2 + R^2\dot{\vartheta}^2 + 2\dot{x}\dot{\vartheta}R\cos\vartheta) + \frac{1}{2}\frac{3m}{12}4R^2\dot{\vartheta}^2 \\ &+ \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + 4R^2\dot{\vartheta}^2 + 4\dot{x}\dot{\vartheta}R\cos\vartheta) + \frac{1}{2}\frac{m}{2}R^2\dot{\varphi}^2 \,. \end{aligned} \tag{10}$$

Raggruppando e riordinando i termini nella (10) otteniamo, infine, la risposta corretta:

$$T = 4mR^2\dot{\vartheta}^2 + 2m\dot{x}^2 + \frac{1}{4}mR^2\dot{\varphi}^2 + 5mR\dot{x}\dot{\vartheta}\cos\vartheta \,. \tag{11}$$

Q3. *La struttura rigida chiusa riportata in Figura 2 è posta in un piano verticale ed è composta da due aste omogenee rettilinee. L'asta AB, di massa $2m$ e lunghezza $2\ell\sqrt{2}$, inclinata di $\frac{\pi}{4}$ sull'orizzontale, è vincolata a terra tramite due carrelli posti negli estremi; l'asta OC, orizzontale, di massa m e lunghezza ℓ, è incernierata a terra in O ed è incernierata nell'altro estremo nel punto medio della prima asta. Determinare il modulo del momento flettente agente in AB nel punto P, posto a distanza $\frac{\ell}{2}\sqrt{2}$ da A.*

Cominciamo staccando le due aste nel punto M, dove è presente una cerniera interna; al suo posto, dovremo considerare la reazione vincolare interna incognita, che possiamo scomporre in

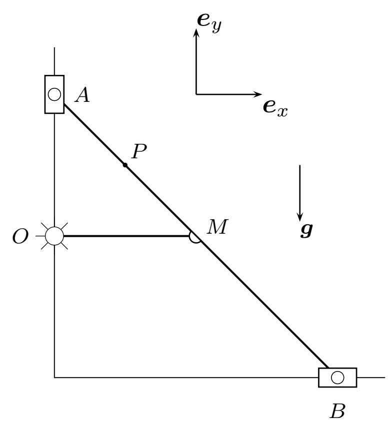

Fig. 2

due componenti indipendenti lungo le direzioni $\boldsymbol{e}_x$ ed $\boldsymbol{e}_y$; sia $\boldsymbol{\varphi} = \varphi_x \boldsymbol{e}_x + \varphi_y \boldsymbol{e}_y$ la forza agente sull'asta AB. In ottemperanza al terzo principio della dinamica, sulla seconda asta agirà una forza $-\boldsymbol{\varphi} = -\varphi_x \boldsymbol{e}_x - \varphi_y \boldsymbol{e}_y$ (si veda la Figura 2a, dove per maggiore chiarezza le due aste sono separate da una piccola distanza fittizia). I due carrelli in A e B esplicano due reazioni vincolari $\boldsymbol{\Phi}_A$ e $\boldsymbol{\Phi}_B$ dirette come $\boldsymbol{e}_x$ ed $\boldsymbol{e}_y$, rispettivamente.

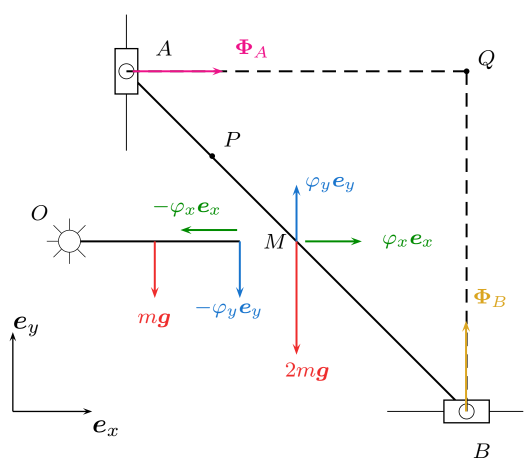

Fig. 2a

Imponiamo, ora, l'equilibrio del momento $M_O^{(OM)}$ calcolato in O delle forze agenti sull'asta OM e quello del momento $M_Q^{(AB)}$ delle forze agenti sull'aste AB calcolato nel punto Q di intersezione delle rette d'azione di $\boldsymbol{\Phi}_A$ e $\boldsymbol{\Phi}_B$; come di consueto, consideriamo solo le componenti del momento dirette lungo $\boldsymbol{e}_z$. Otteniamo:

$$-\varphi_y \, \ell - mg \, \frac{\ell}{2} = 0 \,, \tag{12}$$

da cui

$$\varphi_y = -\frac{1}{2}mg\,; \tag{13}$$

e

$$-\varphi_y \;\; \ell + 2mg \;\; \ell + \varphi_x \;\; \ell = 0\,, \tag{14}$$

da cui

$$\varphi_x = -\frac{5}{2}mg\,. \tag{15}$$

La reazione vincolare $\boldsymbol{\Phi}_A = \Phi_A \boldsymbol{e}_x$ in A si ottiene ora scrivendo la prima equazione cardinale per l'aste AB, proiettata lungo la direzione $\boldsymbol{e}_x$:

$$\Phi_A + \varphi_x = 0\,, \tag{16}$$

ossia

$$\Phi_A = \frac{5}{2}mg\,; \tag{17}$$

a questo punto, il momento flettente M_f richiesto si può ricavare dall'equilibrio dei momenti agenti sul tratto AP, calcolati in P; il peso del tratto di asta corrispondente sarà equivalente a una forza $\frac{1}{4}2mg = \frac{1}{2}mg$, applicata nel punto medio di AP. L'equilibrio richiesto sarà, dunque, dato da (proiettando lungo $\boldsymbol{e}_z$):

$$M_f - \Phi_A \frac{\ell}{2} + \frac{1}{2}mg\,\frac{\ell}{4} = 0\,, \tag{18}$$

da cui, finalmente

$$M_f = \frac{9}{8}\,mg\ell\,, \tag{19}$$

che è già il valore richiesto, essendo positivo.

Q4.

In un riferimento cartesiano ortogonale $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z)$, la configurazione indeformata di una verga euleriana di rigidezza flessionale $B = 5p\ell^2$ è il segmento $0 \le x \le \ell$ (Figura 3). La verga è incernierata in $x = 0$ e vincolata mediante un carrello orizzontale in $x = \ell$ e soggetta ad un sistema di forze distribuite la cui densità per unità di lunghezza è $\boldsymbol{f} = -6p\frac{x}{\ell^2}\boldsymbol{e}_y$. Dire quale sarà la curvatura $\kappa(\frac{\ell}{2})$ al centro della verga, nell'approssimazione di piccole deflessioni.

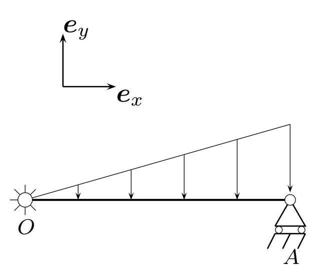

Fig. 3

Anzitutto, nell'approssimazione di piccole deflessioni sarà possibile identificare l'ascissa curvilinea s che individua un punto sulla curva che descrive l'asta deformata con l'ascissa cartesiana x. Iniziamo calcolando le reazioni vincolari $\boldsymbol{\varphi}_O$ e $\boldsymbol{\varphi}_A$, rispettivamente esplicate dalla cerniera in O e dal carrello in A: queste, infatti, serviranno per imporre le condizioni al contorno per le equazioni indefinite di equilibrio. Il carico distribuito è equivalente ad una forza f data da

$$\boldsymbol{f} = -\int_0^\ell 6p\,\frac{x}{\ell^2}\,\mathrm{d}x\,\boldsymbol{e}_y = -3p\,\boldsymbol{e}_y\,, \tag{20}$$

(ricavabile anche applicando la "regola dell'area del triangolo", valida in questo caso) applicata sull'asta nel punto posto a distanza $\frac{2}{3}\ell$ da O (come si può facilmente verificare calcolando il momento del sistema di forze rispetto al polo O). È immediato trovare la reazione $\boldsymbol{\varphi}_A = \varphi_A \boldsymbol{e}_y$, scrivendo l'equilibrio complessivo dei momenti agenti sul sistema rispetto ad O:

$$\varphi_A\,\ell - 3p\,\frac{2}{3}\,\ell = 0\,, \tag{21}$$

da cui

$$\varphi_A = 2p\,; \tag{22}$$

La reazione vincolare $\boldsymbol{\varphi}_O$ deve bilanciare il sistema di forze complessivo restante, quindi:

$$\boldsymbol{\varphi}_O = -\boldsymbol{\varphi}_A - \boldsymbol{f} = p\,\boldsymbol{e}_y\,. \tag{23}$$

Detti $\boldsymbol{\Phi}$ e $\boldsymbol{\Gamma}$ lo sforzo interno ed il momento flettente nella verga, rispettivamente, le equazioni di equilibrio della verga sono

$$\boldsymbol{\Phi}' + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0} \tag{24a}$$

$$\boldsymbol{\Gamma}' + \boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{g} = \boldsymbol{0}\,, \tag{24b}$$

dove $\boldsymbol{t}$ indica il versore normale alla curva, nel nostro caso assimilabile a $\boldsymbol{e}_x$ costantemente, e $\boldsymbol{g}$ indica le coppie distribuite sull'asta (per noi, $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{0}$); l'apice indica la derivata rispetto ad s, ossia rispetto ad x nella nostra approssimazione.

La (24a) integrata consente di ottenere

$$\boldsymbol{\Phi}(x) = \left(3p\,x^2\,\frac{1}{\ell^2}\right)\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{C}\,, \tag{25}$$

e la condizione di equilibrio al bordo nel punto O permette di ottenere il valore della costante C:

$$\boldsymbol{\Phi}(0) + \boldsymbol{\varphi}_O = \boldsymbol{C} + \boldsymbol{\varphi}_O = \boldsymbol{0} \tag{26}$$

da cui ricaviamo che $\boldsymbol{C} = -p\boldsymbol{e}_y$, ossia

$$\boldsymbol{\Phi}(x) = 3p\left(\frac{x^2}{\ell^2} - \frac{p}{3}\right)\,; \tag{27}$$

(è facile verificare che anche in A le condizioni al contorno sono corrette).

Ora, per una verga euleriana si ha:

$$\boldsymbol{\Gamma}(x) = B\kappa(x)\boldsymbol{b}\,, \tag{28}$$

dove la curvatura $\kappa(x)$ è data da $y''(x)$, se $y(x)$ indica la deflessione verticale nel punto di ascissa x, per piccole deflessioni, e $\boldsymbol{b}$ è il versore binormale alla curva che descrive la verga, per noi assimilabile costantemente con $\boldsymbol{e}_z$. D'altronde, dalla (24b) possiamo ricavare, integrando:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\Gamma} &= \int_0^\ell \boldsymbol{\Gamma}' \,\mathrm{d}x \, + \widetilde{\boldsymbol{C}} \\
&= -\int_0^\ell \boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{\Phi} \,\mathrm{d}x \, + \widetilde{\boldsymbol{C}} \\
&= -\int_0^\ell \boldsymbol{e}_x \wedge \boldsymbol{\Phi} \,\mathrm{d}x \, + \widetilde{\boldsymbol{C}} \\
&= \left[3p \left(\frac{x}{3} - \frac{x^3}{3\ell^2} \right) \right] + \widetilde{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{e}_z \\
&= p \left(x - \frac{x^3}{\ell^2} \right) \boldsymbol{e}_z \,,
\end{aligned}
\tag{29}
$$

dove abbiamo usato la (27), e posto $\widetilde{\boldsymbol{C}} = \mathbf{0}$ grazie alla condizione al contorno in O, che impone momento flettente nullo.

Dalla (28) ricaviamo ora la curvatura $\kappa(x)$:

$$
\kappa = \frac{\boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{e}_z}{B} = \frac{p \left(x - \frac{x^3}{\ell^2} \right)}{5p\ell^2} \,,
\tag{30}
$$

e, ponendo $x = \frac{\ell}{2}$ si ricava la risposta cercata, ossia:

$$
\kappa(\frac{\ell}{2}) = \frac{3}{40\ell} \,.
\tag{31}
$$