Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Esame di Meccanica Razionale
Appello del 23 Febbraio 2005
Soluzioni (Parte I)

Q1. *Una lamina quadrata omogenea di massa M e lato di lunghezza ℓ trasla lungo una guida r con velocità costante $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$. Detto O un punto fisso di r quale tra le seguenti affermazioni rigurdante il momento della quantità di moto $\boldsymbol{K}_O$ della lamina rispetto ad O è sicuramente corretta?*

◯ $\boldsymbol{K}_O$ è nullo perché la lamina non ruota.
◯ $\boldsymbol{K}_O$ è costante e deve essere diverso dal vettore nullo.
◯ $\boldsymbol{K}_O$ dipende dalle forze applicate alla lamina. ◯ $\boldsymbol{K}_O \cdot M\boldsymbol{v} = 1$.
◯ $\boldsymbol{K}_O \wedge M\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$.
◯ Nessuna delle precedenti

Il momento della quantità di moto $\boldsymbol{K}_O$ rispetto ad O si può scrivere, grazie al teorema del trasporto, come

$$\boldsymbol{K}_O = \boldsymbol{K}_G + \boldsymbol{Q} \wedge (O - G)$$

dove G è il centro di massa della lamina e $\boldsymbol{Q} = M\boldsymbol{v}$ la sua quantità di moto. Poiché la lamina non ruota, $\boldsymbol{K}_G = \mathbb{I}_G\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{0}$. Tuttavia, se $\boldsymbol{e}_x$ indica la direzione di r ed $\boldsymbol{e}_y$ la direzione ad esso ortogonale, nel piano di moto, abbiamo $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_x$ e $O - G = x\boldsymbol{e}_x - \frac{\ell}{2}\boldsymbol{e}_y$, dove x è l'ascissa di G rispetto ad O. Pertanto

$$\boldsymbol{K}_O = -mv\frac{\ell}{2}\boldsymbol{e}_z$$

è un vettore costante, diverso da $\boldsymbol{0}$.

Q2. *Trovare il vettore posizione del centro Q del cerchio osculatore della curva*

$$p(t) - O = t\cos t\boldsymbol{e}_x + 3t^2\boldsymbol{e}_y + 2t\sin t\boldsymbol{e}_z$$

nel punto corrispondente a $t = 0$.

Poiché la curva passa per l'origine se $t = 0$, la posizione del centro Q del cerchio osculatore rispetto ad O è

$$Q - O = \frac{1}{c(0)}\boldsymbol{n}(0)$$

dove

$$c(0) = \frac{|\dot{p} \wedge \ddot{p}|}{|\dot{p}|^3}(0)$$

è la curvatura in $t = 0$ e $\boldsymbol{n}(0) = \boldsymbol{b}(0) \wedge \boldsymbol{t}(0)$ è la normale principale nello stesso punto. Poiché $\boldsymbol{t} = \frac{\dot{p}}{|\dot{p}|}$ e $\boldsymbol{b} = \frac{\dot{p} \wedge \ddot{p}}{|\dot{p} \wedge \ddot{p}|}$ possiamo scrivere

$$Q - O = \frac{|\dot{p}|^2}{|\dot{p} \wedge \ddot{p}|^2} (\dot{p} \wedge \ddot{p}) \wedge \dot{p} \, .$$

Svolgendo le derivate fino al secondo ordine in t otteniamo

$$\dot{p}(t) = (\cos t - t \sin t)\boldsymbol{e}_x + 6t\boldsymbol{e}_y + 2(\sin t + t \cos t)\boldsymbol{e}_z$$

e

$$\ddot{p}(t) = -(2 \sin t + t \cos t)\boldsymbol{e}_x + 6\boldsymbol{e}_y + 2(2 \cos t - t \sin t)\boldsymbol{e}_z$$

che, specializzate per $t = 0$, dànno

$$\dot{p}(0) = \boldsymbol{e}_x$$

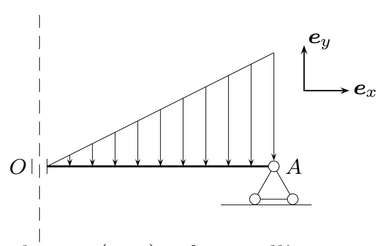
e

$$\ddot{p}(0) = 6\boldsymbol{e}_y + 4\boldsymbol{e}_z \, .$$

Sostituendo nell'espressione di $Q - O$ ricaviamo infine

$$Q - O = \frac{1}{26}(3\boldsymbol{e}_y + 2\boldsymbol{e}_z) \, .$$

Q3. *Una verga euleriana OA di lunghezza ℓ e rigidità flessionale $B = 14p\ell^3$ è rettilinea nella configurazione indeformata. L'estremo O della verga è vincolato a terra da un incastro scorrevole, mentre l'estremo A è vincolato da un appoggio bilatero. Sulla verga è applicato un carico avente densità lineare $\boldsymbol{f} = -\alpha p \frac{x}{\ell} \boldsymbol{e}_y$. Nell'ipotesi di piccole deflessioni, trovare il valore di α per cui, all'equilibrio, l'estremo O si trova ad una quota $y(0) = -\frac{\ell}{140}$.*



Introduciamo le coordinate (x, y) riferite all'origine O, orientando i corrispondenti assi cartesiani lungo le direzioni $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y\}$ indicate in Figura. Le equazioni di equilibrio dell'asta sono

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Phi}' + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\Gamma}' + \boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{0} \end{cases} \tag{1}$$

dove $\boldsymbol{\Phi}$ è lo sforzo interno all'asta e $\boldsymbol{\Gamma} = Bc\boldsymbol{b}$ è il momento flettente, espresso in termini della curvatura c dell'asta e del versore binormale $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_z$. Nell'ipotesi di piccole deflessioni le derivate che compaiono nelle equazioni di equilibrio si possono considerare effettuate rispetto alla variabile x ed il versore tangente $\boldsymbol{t}$ è approssimabile con $\boldsymbol{e}_x$; inoltre la curvatura è data da $c(x) = y''(x)$. Le equazioni di equilibrio vanno abbinate ad opportune condizioni al contorno che tengano in considerazione il tipo di sollecitazione cui è sottoposta la verga alle estremità. Poiché in O, corrispondente ad $x = 0$, vi è un incastro scorrevole che impedisce le rotazioni, la tangente alla verga è ivi bloccata e diretta lungo $\boldsymbol{e}_x$, pertanto $y'(0) = 0$. Nell'estremo A, dove $x = \ell$, il carrello bilatero non esplica momento e dunque momento flettente deve annullarsi, cosicché $c(\ell) = y''(\ell) = 0$. Inoltre, poiché il carrello non consente traslazioni lungo $\boldsymbol{e}_y$, deve anche essere $y(\ell) = 0$. Stante l'espressione di $\boldsymbol{f}$ possiamo ricavare $\boldsymbol{\Phi}$ dalla $(1)_1$ come

$$\boldsymbol{\Phi} = \frac{\alpha p}{2\ell} x^2 \boldsymbol{e}_y \,,$$

dove si è osservato che la costante di integrazione deve annullarsi in quanto dovrebbe essere simultaneamente parallela ad $\boldsymbol{e}_x$, per tener conto della sollecitazione indotta in O dall'incastro scorrevole e parallela ad $\boldsymbol{e}_y$ per rispettare la sollecitazione in A indotta dall'appoggio bilatero. Sostituendo il valore appena trovato per $\boldsymbol{\Phi}$ nella $(1)_2$ ed utilizzando l'ipotesi di piccole deflessioni abbiamo

$$14\ell^3 y''' + \frac{\alpha}{2\ell} x^2 = 0 \,,$$

da risolvere con le condizioni al contorno

$$\begin{cases} y'(0) = 0 \\ y(\ell) = 0 \\ y''(\ell) = 0 \,. \end{cases} \tag{2}$$

Dopo una prima integrazione ricaviamo, grazie a $(2)_3$

$$y''(x) = -\frac{\alpha}{84\ell^4}(x^3 - \ell^3) \,.$$

Integrando ancora e tenendo conto di $(2)_1$ abbiamo poi

$$y''(x) = -\frac{\alpha}{84\ell^4}(\frac{x^4}{4} - \ell^3 x)$$

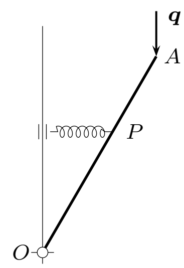
ed infine, con l'ausilio di $(2)_2$ concludiamo che

$$y(x) = -\frac{\alpha}{84\ell^4}(\frac{x^5}{20} - \ell^3 \frac{x^2}{2} + \frac{9}{20}\ell^5) \,.$$

Se ora imponiamo la condizione sulla deflessione in O $y(0) = -\frac{\ell}{140}$ arriviamo a

$$\alpha = \frac{4}{3} \,.$$

Q4. *In un piano verticale, un'asta omogenea OA di lunghezza ℓ e peso trascurabile è incernierata senza attrito a terra nell'estremo O. L'estremo A è soggetto ad un carico $\boldsymbol{q} = -2p\boldsymbol{e}_y$ ed una molla ideale di lunghezza a riposo nulla e costante elastica $\frac{9p}{\ell}$ attrae il punto P dell'asta distante $\gamma\ell$ da O verso un punto posto alla stessa quota di P, sulla retta verticale passante per O. Per quali valori di γ risulta stabile la configurazione in cui l'asta è verticale, con A sopra O?*



Osserviamo che deve essere $\gamma \in [0, 1]$, perché il problema abbia senso. Sia ϑ l'angolo compreso tra la verticale per O ed OA. L'esercizio chiede di discutere la stabilità della configurazione in cui $\vartheta = 0$. A questo scopo osserviamo che l'energia potenziale associata al carico costante $\boldsymbol{q}$ è, a meno di una costante additiva, $V_q = 2p\ell\cos\vartheta$. Aggiungendo a V_q il contributo della forza elastica otteniamo l'energia potenziale complessiva V

$$V(\vartheta) = 2p\ell\cos\vartheta + \frac{9p\ell}{2}\gamma^2\sin^2\vartheta\,.$$

Le configurazioni di equilibrio si ottengono risolvendo l'equazione

$$V'(\vartheta) = p\ell\sin\vartheta(-2 + 9\gamma^2\cos\vartheta) = 0$$

che ammette le radici $\vartheta = 0$, $\vartheta = \pi$ ed, eventualmente $\cos\vartheta = \frac{2}{9\gamma^2}$. Poiché siamo interessati alla stabilità di $\vartheta = 0$ deriviamo ancora rispetto a ϑ

$$V''(\vartheta) = p\ell[\cos\vartheta(-2 + 9\gamma^2\cos\vartheta) - 9\gamma^2\sin^2\vartheta]$$

e imponiamo che $V''(0) > 0$, ottenendo

$$-2 + 9\gamma^2 > 0$$

da cui deduciamo che la configurazione $\vartheta = 0$ è stabile se $1 \geq \gamma > \frac{\sqrt{2}}{3}$ mentre è instabile se $0 \leq \gamma < \frac{\sqrt{2}}{3}$. Il caso $\gamma = \frac{\sqrt{2}}{3}$ richiede l'analisi delle derivate successive in quanto per questo valore particolare $V''(0) = 0$ ed il primo criterio di Ljapunov non può essere applicato. Procedendo nelle derivazioni è possibile dimostrare che la prima derivata diversa da 0 in $\vartheta = 0$ è la derivata quarta

$$V^{(iv)}(0) = -7p\ell < 0\,.$$

Dunque, se $\gamma = \frac{\sqrt{2}}{3}$ la configurazione $\vartheta = 0$ corrisponde ad un massimo relativo isolato di $V(\vartheta)$ ed è instabile. L'intervallo di stabilità per γ è allora

$$\gamma \in (\frac{\sqrt{2}}{3}, 1] \, .$$