UNIVERSITÀ DI PAVIA
FACOLTÀ DI INGEGNERIA

***Esame di Meccanica Razionale (Parte I)***

*23 febbraio 2006*

Il ***candidato*** scriva nello spazio sottostante il proprio Cognome e Nome.

**COGNOME** **NOME**

La ***prova*** consta di **4** Quesiti e durerà **2 *ore***. ***Non è permesso*** consultare testi od appunti, al di fuori di quelli distribuiti dalla Commissione.
La ***risposta*** a ciascuno di essi va scelta *esclusivamente* tra quelle già date nel testo, annerendo *un solo* circoletto ○. Una sola è la risposta corretta. Qualora sia data più di una risposta allo stesso quesito, questa sarà considerata errata, anche se una delle risposte date è corretta.
I ***punteggi*** per ciascun quesito sono dichiarati in *trentesimi* sul testo, nel seguente formato

**{E,NE,A}**

dove **E** è il punteggio assegnato in caso di risposta *Esatta*, **NE** quello in caso di risposta *Non Esatta* e **A** quello in caso di risposta *Assente*. L'esito finale della prova è determinato dalla somma *algebrica* dei punteggi parziali. Spazio riservato alla Commissione. *Non scrivere nelle caselle sottostanti!*

**ESITO**

## QUESITI

**Q1.** *Da un quadrato omogeneo di lato $4\ell$ e massa $2m$ viene asportato il cerchio inscritto ottenendo una lamina $\mathcal{L}_1$ (Figura 1). Da un disco di diametro $4\ell$ e massa $2m$ viene asportato il quadrato inscritto, ottenendo la lamina $\mathcal{L}_2$. Calcolare la differenza tra il momento centrali di inerzia di $\mathcal{L}_1$ e quello di $\mathcal{L}_2$ nella direzione $\boldsymbol{e}_z$ ortogonale al piano che le contiene.*

**{5,-1,0}**

***Soluzione***

○ $\frac{(4\pi-3\pi^2+16)}{8\pi}m\ell^2$ ○ $\frac{3(4\pi-3\pi^2+16)}{16\pi}m\ell^2$ ○ $\frac{(4\pi-3\pi^2+16)}{6\pi}m\ell^2$ ♠ $\frac{(4\pi-3\pi^2+16)}{3\pi}m\ell^2$

○ $\frac{(4\pi-3\pi^2+16)}{12\pi}m\ell^2$ ○ $\frac{9(4\pi-3\pi^2+16)}{32\pi}m\ell^2$ ○ $\frac{(4\pi-3\pi^2+16)}{2\pi}m\ell^2$ ○ $\frac{3(4\pi-3\pi^2+16)}{8\pi}m\ell^2$

**Q2.** *Trovare la curvatura della curva*

$$p(t) - O = (t^2 + t)\boldsymbol{e}_x + \ln(t + \frac{1}{2})\boldsymbol{e}_y + \mathrm{e}^{-2t}\boldsymbol{e}_z$$

*nel punto corrispondente a $t = 0$.*

**{5,-1,0}**

***Risposta***

○ $\kappa = \frac{8\sqrt{5}}{27}$ ♠ $\kappa = \frac{8\sqrt{2}}{27}$ ○ $\kappa = \frac{4\sqrt{17}}{27}$ ○ $\kappa = \frac{2\sqrt{5}}{7\sqrt{21}}$
○ $\kappa = \frac{2\sqrt{5}}{21\sqrt{21}}$ ○ $\kappa = \frac{4}{21\sqrt{21}}$ ○ $\kappa = \frac{4\sqrt{73}}{21\sqrt{21}}$ ○ $\kappa = \frac{8\sqrt{5}}{7\sqrt{21}}$

---

**Q3.** *In un piano verticale, un'asta omogenea di massa $2m$ e lunghezza $2\ell$ ha gli estremi vincolati a scorrere senza attrito lungo due guide ortogonali $r$ ed $s$ disposte come in Figura 2. Il centro di massa dell'asta è attratto da una molla ideale di costante elastica $k = 3mg/\ell$ verso il centro di un disco omogeneo di massa $2m$ e raggio $\ell$, vincolato a rotolare senza strisciare lungo $s$. Dette $x$ e $\vartheta$ le coordinate lagrangiane indicate in Figura 2, se all'istante iniziale il sistema si trova in quiete nella configurazione con $x(0) = 3\ell$ e $\vartheta(0) = \pi/6$, trovare il valore della coppia $(\ddot{x}(0), \ddot{\vartheta}(0))$.*

**{5,-1,0}**

***Soluzione***

♠ $(-\frac{7}{2}g; -\frac{3}{16}(9\sqrt{3}+1)\frac{g}{\ell})$ ○ $(-\frac{14}{9}g; -\frac{9}{8}\sqrt{3}\frac{g}{\ell})$ ○ $(-\frac{7}{3}g; -\frac{1}{8}(6\sqrt{3}-1)\frac{g}{\ell})$ ○ $(-\frac{14}{3}g; -\frac{3}{8}(17+2\sqrt{3})\frac{g}{\ell})$
○ $(-\frac{7}{6}g; -\frac{9}{32}(\sqrt{3}-1)\frac{g}{\ell})$ ○ $(-7g; -\frac{1}{16}(9\sqrt{3}+1)\frac{g}{\ell})$ ○ $(-\frac{7}{5}g; -\frac{3}{8}(9\sqrt{3}+2)\frac{g}{\ell})$ ○ $(-\frac{7}{9}g; -\frac{3}{16}(3\sqrt{3}-1)\frac{g}{\ell})$

---

**Q4.** *In un piano verticale, un filo $AB$* **non** *omogeneo di lunghezza $\ell = \pi R$ è appoggiato senza attrito su di un semidisco di raggio $R$, come indicato in Figura 3. Il peso per unità di lunghezza del filo è $p(s) = 4ps/R^2$, dove $s$ è l'ascissa curvilinea lungo $AB$ contata a partire da $A$. Trovare quanto deve valere il peso di un punto materiale da collocare in $A$ affinché il filo rimanga in equilibrio nella configurazione descritta in figura.*

**{5,-1,0}**

***Soluzione***

○ $4p$ ○ $p$ ○ $3p$ ○ $4p/3$ ○ $2p/3$ ○ $6p$ ○ $p/2$ ♠ $8p$

---

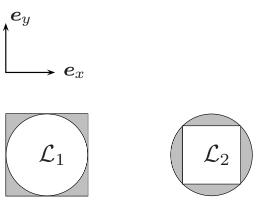


Fig. 1

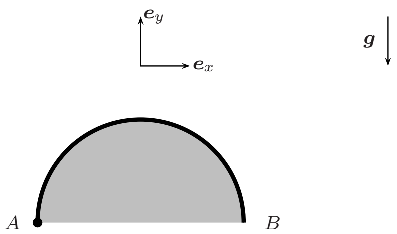


Fig. 3

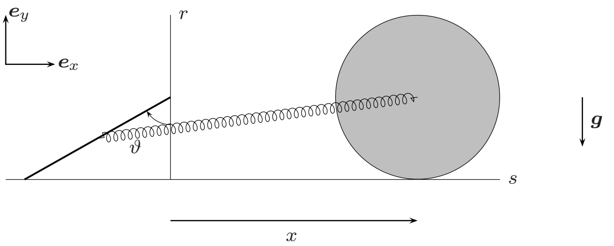


Fig. 2