

Università di Pavia  
 Facoltà di Ingegneria  
 Esame di Meccanica Razionale  
 Appello del 23 febbraio 2006  
**Soluzioni: parte II**

**Q1.** Dati i tensori  $\mathbf{A} = \alpha \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_x - \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_y$  e  $\mathbf{B} = \beta \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + 2\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_x$ , ed il vettore  $\mathbf{v} = \mathbf{e}_x + \gamma \mathbf{e}_y - 2\mathbf{e}_z$ . Calcolare  $(\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{v})^2 - \mathbf{A}\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}\mathbf{v}$ .

Calcoliamo i singoli termini dello scalare che serve per la risoluzione; ricordiamo la regola che definisce il prodotto diadico, ossia

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{c} := (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}, \quad (1)$$

e la regola di contrazione delle diadi:

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})(\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) := (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} \otimes \mathbf{d}. \quad (2)$$

Abbiamo, quindi, sfruttando le proprietà di ortonormalità della base  $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ :

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = (\alpha \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_x - \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_y)(\mathbf{e}_x + \gamma \mathbf{e}_y - 2\mathbf{e}_z) = \alpha \mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y - \gamma \mathbf{e}_z, \quad (3a)$$

$$\mathbf{B}\mathbf{v} = (\beta \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + 2\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_x)(\mathbf{e}_x + \gamma \mathbf{e}_y - 2\mathbf{e}_z) = -2\beta \mathbf{e}_x + \gamma \mathbf{e}_y + 2\mathbf{e}_z, \quad (3b)$$

e

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{v} &= (\alpha \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_x - \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_y)(\beta \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + 2\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_x)\mathbf{v} \\
 &= (\alpha\beta \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_z + 2\beta \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_z - \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_y)\mathbf{v} \\
 &= (\alpha\beta \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_z + 2\beta \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_z - \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_y)(\mathbf{e}_x + \gamma \mathbf{e}_y - 2\mathbf{e}_z) \\
 &= -2\alpha\beta \mathbf{e}_x - 4\beta \mathbf{e}_y - \gamma \mathbf{e}_z.
 \end{aligned} \quad (4)$$

Si ha, quindi:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{v})^2 - \mathbf{A}\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}\mathbf{v} &= 4\alpha^2\beta^2 + 16\beta^2 + \gamma^2 - (-2\alpha\beta + 2\gamma - 2\gamma) \\
 &= 2\alpha\beta(2\alpha\beta + 1) + 4\beta^2 + \gamma^2.
 \end{aligned} \quad (5)$$

Naturalmente, i calcoli si possono effettuare anche usando le matrici che rappresentano i tensori e i vettori nella base usata; l'esercizio di verifica del risultato è lasciato al lettore.

**Q2.** La struttura rigida riportata in Figura 1 è posta in un piano verticale ed è composta da tre aste omogenee rettilinee. L'asta  $AB$ , di lunghezza  $\sqrt{2}\ell$  e massa  $\alpha m$ , e l'asta  $AC$  di lunghezza  $\ell/\sqrt{3}$  e massa  $\beta m$  sono vincolate a terra da un carrello con retta d'azione verticale posto in  $A$ , alla stessa quota di  $O$  e a distanza  $\ell$  da esso; l'asta  $OB$  verticale di lunghezza  $\ell$  e massa  $\gamma m$  è incernierata a terra in  $O$ .  $AB$  e  $AC$  sono vincolate a  $OB$  da due cerniere poste in  $B$  e in  $C$ , rispettivamente. In  $B$  agisce una forza  $\mathbf{f} = -\delta m g \mathbf{e}_x$ . Determinare il modulo della sforzo assiale esercitato sulla struttura nel punto  $P$  di  $OB$ , posto a distanza  $\ell/4$  da  $B$ .

Cominciamo a determinare la reazione vincolare in  $O$   $\Phi_O$  data la natura del vincolo, possiamo scrivere che

$$\Phi_O = \Phi_{Ox} \mathbf{e}_x + \Phi_{Oy} \mathbf{e}_y,$$

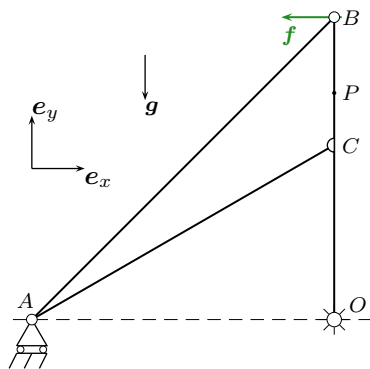


Figura 1: la struttura descritta nel quesito 2.

con due incognite scalari  $\Phi_{Ox}$  e  $\Phi_{Oy}$ . Poiché l'unico altro vincolo a terra è il carrello posto in A, che non esplica alcuna reazione vincolare lungo l'orizzontale, la prima equazione cardinale per l'intero sistema proiettata lungo  $e_x$  permette di determinare subito che

$$\Phi_{Ox} = \delta mg. \quad (6)$$

Imponiamo, ora, l'equilibrio del momento complessivo calcolato in A (ossia, l'unica componente non banale della seconda equazione cardinale scegliendo A come polo; questa equazione contiene la sola incognita vincolare  $\Phi_{Oy}$ , poiché la reazione vincolare in A non dà contributo, e neanche  $\Phi_{Ox}e_x$ . Ricordando che le forze peso delle aste omogenee possono essere applicate nel loro punto medio (si veda la Figura 2), e usando le proprietà geometriche della struttura descritte nel testo, otteniamo immediatamente:

$$\Phi_{Oy} = \left( \frac{\alpha + \beta}{2} + \gamma - \delta \right) mg. \quad (7)$$

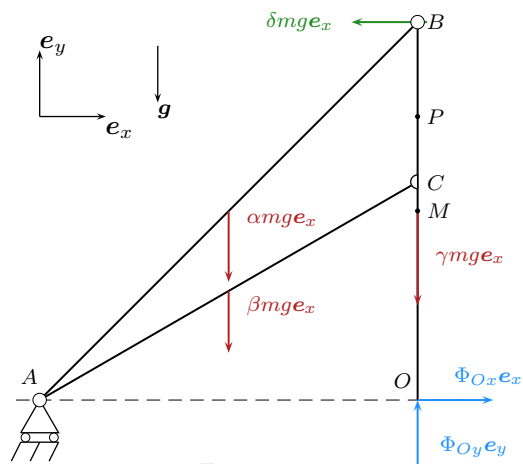


Fig. 1a

Figura 2: determiniamo la reazione vincolari interne in O.

Per poter calcolare l'azione assiale in  $P$  manca l'informazione relativa alla reazione vincolare che le aste  $AC$  e  $B$  si scambiano in  $C$ . Al fine di determinare questa reazione vincolare, sopprimiamo la cerniera interna posta in  $C$  e, al suo posto, introduciamo la reazione vincolare  $\varphi_C = \varphi_x e_x + \varphi_y e_y$  che agisce su  $AC$ , e la reazione vincolare  $-\varphi_C$  che agisce su  $OB$ , in virtù del terzo principio della dinamica (si veda Figura 3, dove, per maggiore chiarezza, le forze su diverse rette d'azione e in punti leggermente separati da una distanza fittizia).

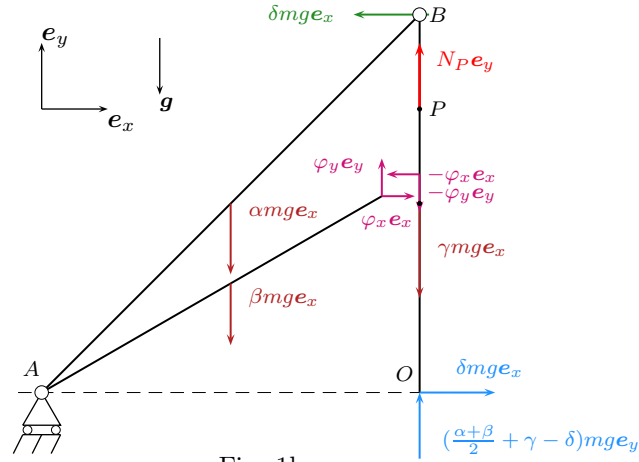


Fig. 1b

Figura 3: stacciamo ora l'asta  $AC$  e facciamo comparire le reazioni vincolari interne.

L'equilibrio dei momenti calcolati in  $B$  per l'asta  $AB$  dà, notando che  $OC = \ell - \frac{\ell}{\sqrt{3}}$ :

$$\varphi_x = \delta \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} mg; \quad (8)$$

imponendo, quindi, l'equilibrio dei momenti in  $A$  per  $AC$  otteniamo, usando la (8):

$$\begin{aligned} \varphi_y \ell - \beta mg \frac{\ell}{2} - \varphi_x \frac{\ell}{\sqrt{3}} &= \\ \varphi_y \ell - \beta mg \frac{\ell}{2} - \delta \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} mg \frac{\ell}{\sqrt{3}} &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Ora, dalla (9) ricaviamo  $\varphi_y$ :

$$\varphi_y = \delta \frac{mg}{\sqrt{3}-1} + \beta \frac{mg}{2}, \quad (10)$$

e se ora immaginiamo di spezzare l'asta in  $P$ , dovremo considerare le azioni interne che appaiono in tale punto; quindi, detto  $N_P$  lo sforzo assiale in  $P$ , supposto orientato come  $e_y$ , possiamo ricavarne il valore imponendo l'equilibrio delle forze in verticale. Si ha, notando che il peso del tratto è  $\frac{3}{4}\gamma mg$  e ricordando le (7) e (10):

$$\begin{aligned}
N_P &= \frac{3}{4}\gamma mg + \varphi_y - \Phi_{Oy} \\
&= \frac{3}{4}\gamma mg + \delta \frac{mg}{\sqrt{3}-1} - \beta \frac{mg}{2} - \left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \gamma - \delta\right)mg \\
&= \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\delta - \frac{1}{4}\gamma - \frac{1}{2}\alpha\right)mg \\
&= \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\delta - \frac{1}{4}\gamma - \frac{1}{2}\alpha\right)mg;
\end{aligned} \tag{11}$$

il valore assoluto della (11) risolve l'esercizio.

**Q3.** Un corpo rigido di massa totale  $m$  compie un atto di moto in cui  $\mathbf{v}_C$  è la velocità del centro di massa  $C$  del sistema,  $\mathbf{v}_O$  è la velocità di un altro suo punto  $O$  ed  $\boldsymbol{\omega}$  la velocità angolare; siano, inoltre,  $\mathbb{I}_C$  e  $\mathbb{I}_O$  i tensori d'inerzia calcolati nei punti  $C$  ed  $O$ , rispettivamente. Quale fra le seguenti espressioni per il momento della quantità di moto  $\mathbf{K}_O$  è **sempre** vera?

1.   $\mathbf{K}_O = (C - O) \wedge m\mathbf{v}_C$
2.   $\mathbf{K}_O = (C - O) \wedge m\mathbf{v}_O$
3.   $\mathbf{K}_O = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_C^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbb{I}_C\boldsymbol{\omega}$
4.   $\mathbf{K}_O = \mathbb{I}_O\boldsymbol{\omega}$
5.   $\mathbf{K}_O = \mathbb{I}_O\boldsymbol{\omega} + (C - O) \wedge m\mathbf{v}_C$
6.   $\mathbf{K}_O = \mathbb{I}_C\boldsymbol{\omega} + (C - O) \wedge m\mathbf{v}_C$
7.   $\mathbf{K}_O = \mathbb{I}_C\boldsymbol{\omega} + (C - O) \wedge m\mathbf{v}_O$
8.  Nessuna delle precedenti

Il testo ci dice che  $O$  è un punto del corpo rigido, quindi partecipa del moto rigido. Per definizione, il momento della quantità di moto di un sistema composto da  $N$  punti materiali  $P_i$ , ciascuno dei quali dotato di massa  $m_i$  e velocità  $\mathbf{v}_i$ , è

$$\mathbf{K}_O := \sum_{i=1}^N (P_i - O) \wedge m_i\mathbf{v}_i, \tag{12}$$

o l'analogo per il caso continuo, usando un'integrazione di volume al posto della sommatoria. Usando la formula dell'atto di moto rigido, possiamo scrivere che

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \wedge (P_i - O); \tag{13}$$

sostituendo la (13) e con alcuni passaggi ricaviamo che

$$\mathbf{K}_O = \mathbb{I}_O\boldsymbol{\omega} + (C - O) \wedge m\mathbf{v}_O, \tag{14}$$

che però non è fra le risposte proposte. Se si sceglie  $C$  come polo, la (14) diventa

$$\mathbf{K}_C = \mathbb{I}_C\boldsymbol{\omega} + (C - C) \wedge m\mathbf{v}_O = \mathbb{I}_C\boldsymbol{\omega}, \tag{15}$$

e, usando il teorema del trasporto, possiamo scrivere che

$$\mathbf{K}_O = \mathbf{K}_C + (C - O) \wedge m\mathbf{v}_C = \mathbb{I}_C\boldsymbol{\omega} + (C - O) \wedge m\mathbf{v}_C. \quad (16)$$

Poichè la (16) coincide con **la risposta 6, questa è quella corretta**, e la risposta 8, quindi, è per forza da scartare.

Sulla scorta di quanto detto, possiamo discutere separatamente le varie altre opzioni.

Osservando la (16), si nota che la risposta 1 coinciderebbe con essa solo quando  $\mathbf{K}_C = \mathbb{I}_C\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ ; in generale,  $\mathbb{I}_C\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$  (basta prendere  $\boldsymbol{\omega}$  diretto come uno degli assi principali d'inerzia, e ne esiste sempre almeno uno lungo il quale il momento centrale d'inerzia non è nullo, poiché il corpo è formato da almeno due punti distinti). Quindi la 1 non è sempre vera: viene pertanto scartata.

La risposta 2 coinciderebbe con la (6) solo quando  $\mathbb{I}_O\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ ; anche in questo caso, in generale questo è falso (si ricava da poche modifiche al ragionamento fatto sopra).

La risposta 3 presenta al secondo membro una grandezza scalare, omogenea ad un'energia (è, in effetti, l'espressione dell'energia cinetica scritta usando il teorema di KÖNIG, quindi è assolutamente da scartare.

Se la risposta 5 fosse corretta, sottraendo membro a membro la sua espressione con quella della risposta 6 otterremmo che  $(\mathbb{I}_O - \mathbb{I}_C)\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ . Data l'arbitrarietà di  $\boldsymbol{\omega}$ , questo implicherebbe che  $(\mathbb{I}_O - \mathbb{I}_C) = \mathbf{0}$ , che è falso: per il teorema di HUYGENS-STEINER i due tensori sono differenti.

Se la risposta 7 fosse corretta, sottraendo membro a membro la sua espressione con quella della risposta 6 otterremmo che  $(C - O) \wedge m(\mathbf{v}_C - \mathbf{v}_O) = \mathbf{0}$ . Ossia, usando la formula dell'atto di moto rigido (13) per  $C$  al posto di  $P_i$ , e sfruttando le proprietà del prodotto vettoriale triplo:

$$(C - O) \wedge m(\boldsymbol{\omega} \wedge (C - O)) = (C - O)^2 \boldsymbol{\omega} - ((C - O) \cdot \boldsymbol{\omega})(C - O) = \mathbf{0}, \quad (17)$$

che, in generale è falso (basta prendere  $\boldsymbol{\omega}$  in modo che non sia parallelo a  $C - O$ , e il primo membro della (17) è sicuramente non nullo, poiché  $C \neq O$ ).

**Q4.** In un piano verticale, un disco omogeneo di massa  $m$  e raggio  $R$  è vincolato a rotolare senza strisciare lungo una guida orizzontale; un'asta  $AC$  di massa  $m$  e lunghezza  $4R$  ha un estremo libero di ruotare attorno al centro  $C$  del disco, che è attratto verso un punto  $O$  fisso della guida orizzontale da una molla di costante elastica  $\gamma mg/R$  e lunghezza a riposo nulla. Una seconda molla di costante elastica  $\delta mg/R$  e lunghezza a riposo nulla attrae il punto medio  $G$  dell'asta verso un punto posto sempre alla sua stessa quota di una guida verticale passante per  $O$  (Figura 4). Calcolare le frequenze delle piccole oscillazioni in un intorno della posizione di equilibrio con l'asta  $AC$  verticale con  $A$  sotto  $C$ .

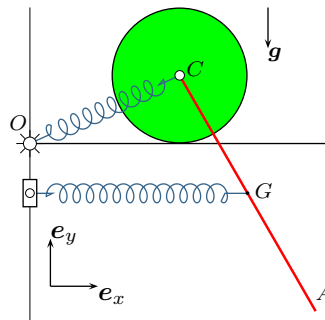


Figura 4: sistema descritto nel quesito Q4.

Il sistema due gradi di libertà: possiamo associarli alle coordinate lagrangiane corrispondenti all'ascissa  $x$  di  $C$  lungo la direzione  $e_x$ , misurata a partire dal punto  $O$  cui è fissata la prima molla e dall'angolo  $\vartheta$  che l'asta  $AC$  forma con la verticale (si veda la figura 5 per maggiore chiarezza).

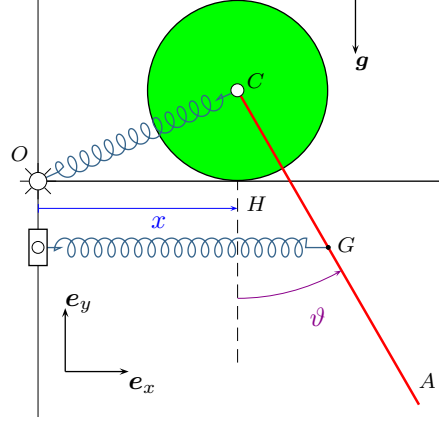


Figura 5: sistema del quesito Q4, con indicazione delle variabili usate.

Cominciamo scrivendo il vettore che individua la posizione del centro di massa del disco rispetto all'origine del riferimento, che porremo in  $O$ :

$$G - O = (x + 2R \sin \vartheta) e_x + (R - R \cos \vartheta) e_y; \quad (18)$$

la derivata della (18) ci darà la velocità di  $G$ :

$$v_G = \dot{G} = (\dot{x} + 2R\dot{\vartheta} \cos \vartheta) e_x + R\dot{\vartheta} \sin \vartheta e_y. \quad (19)$$

La condizione di puro rotolamento per il disco impone, quindi, che la sua velocità angolare sia

$$\omega_d = -\frac{\dot{x}}{R} e_z; \quad (20)$$

la velocità angolare dell'asta, invece, è semplicemente

$$\omega_a = \dot{\vartheta} e_z. \quad (21)$$

Possiamo, quindi, scrivere l'energia cinetica del sistema: per il disco, conosciamo istante per istante il centro di istantanea rotazione, che è il punto di contatto istantaneo  $H$  (vd. figura 5), e pertanto il calcolo della sua energia cinetica risulta semplificato; per l'asta, ricorreremo al teorema di KÖNIG. Otteniamo, dunque:

$$\begin{aligned} T &= T(x, \vartheta, \dot{x}, \dot{\vartheta}) = \frac{1}{2} \omega \cdot \mathbb{I}_H^d \omega + \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} \omega \cdot \mathbb{I}_G^a \omega \\ &= \frac{1}{2} \frac{3}{2} m R^2 \left( \frac{\dot{x}}{R} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{12} m (4R)^2 \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 4R^2 \dot{\vartheta}^2 + 4R \dot{\vartheta} \dot{x} \cos \vartheta) \\ &= \frac{3}{4} m \dot{x}^2 + \frac{2}{3} m R^2 \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 4R^2 \dot{\vartheta}^2 + 4R \dot{\vartheta} \dot{x} \cos \vartheta) \end{aligned} \quad (22)$$

Per quanto riguarda l'energia potenziale totale  $V$ , oltre a quella delle due molle dobbiamo contare l'energia potenziale gravitazionale dell'asta (la quota del centro di massa della disco, invece,

rimane costante: essendo l'energia potenziale definita a meno di una costante additiva, possiamo considerare nullo il contributo del disco a  $V$ ). La quota  $y_C$  è stata già espressa in funzione di  $x$  e  $\vartheta$  nella (18); complessivamente otteniamo per l'energia potenziale  $V$ , a meno di costanti:

$$V = V(x, \vartheta) = -2\beta mgR \cos \vartheta + \frac{1}{2}\gamma \frac{mg}{R} x^2 + \frac{1}{2}\delta \frac{mg}{R} (x + 2R \sin \vartheta)^2 \quad (23)$$

Le configurazioni di equilibrio si trovano annullando il gradiente di  $V(x, \vartheta)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= \gamma \frac{mg}{R} x + \delta \frac{mg}{R} (x + R \sin \vartheta) = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \vartheta} &= 2\beta mgR \sin \vartheta + \delta \frac{mg}{R} (x + 2R \sin \vartheta) 2R \cos \vartheta = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Si osserva subito che, per  $\vartheta_{eq} = 0$ , che è l'angolo alla posizione di equilibrio descritta nel testo, si ottiene che l'ascissa di  $C$  di equilibrio che annulla il gradiente (24) è  $x_{eq} = 0$ .

Per trovare le pulsazioni dei modi normali, dobbiamo procedere alla diagonalizzazione simultanea delle forme quadratiche associate alle matrici  $A$  e  $B$  i cui elementi sono così definiti, rispettivamente:

$$A_{ij} = \left. \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right|_{q=q_0} \quad (25a)$$

$$B_{ij} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q=q_0} \quad (25b)$$

dove, per brevità, abbiamo posto  $q := (q_1, q_2) := (x, \vartheta)$ , e  $q_0$  indica i valori all'equilibrio; otteniamo, calcolando le derivate parziali delle (24):

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}m & 2mR \\ 2mR & \frac{16}{3}mR^2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} (\gamma + \delta) \frac{mg}{R} & 2\delta mg \\ 2\delta mg & (2 + 4\delta)mgR \end{pmatrix} \quad (26)$$

anzitutto, notiamo che la matrice hessiana dell'energia potenziale (25b) è definita positiva, (basta osservare che  $\det(B) = 2(mg)^2(\gamma + \delta + 2\gamma\delta)$  e  $B_{11}$  sono entrambi positivi), e questo permette subito di affermare che la configurazione di equilibrio trovata è effettivamente stabile, essendo un punto isolato di minimo dell'energia potenziale (criterio di DIRICHLET-LAGRANGE).

Risolviamo ora l'equazione caratteristica in  $\lambda$ :

$$\det(B - \lambda A) = m \left[ (\gamma + \delta) \frac{g}{R} - \frac{5}{2}\lambda \right] m \left[ (2 + 4\delta)gR - \frac{16}{3}\lambda R^2 \right] - m(2\delta g - 2\lambda R)^2 = 0, \quad (27)$$

ossia, semplificando e ponendo  $\tilde{\lambda} := R\lambda/g$  per snellire la notazione,

$$28\tilde{\lambda}^2 - (16\gamma + 22\delta + 15)\tilde{\lambda} + 6(\gamma + \delta + 2\gamma\delta) = 0. \quad (28)$$

Le pulsazioni delle piccole oscillazioni in un intorno della posizione di equilibrio stabile  $\omega_{1,2}$  si trovano prendendo le radici quadrate delle radici della (27):

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{56}(16\gamma + 22\delta + 15 \pm \sqrt{\Delta})} \frac{g}{R}, \quad (29)$$

dove  $\Delta = (16\gamma + 22\delta + 15)^2 - 672(\gamma + \delta + 2\gamma\delta)$ .