Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Esame di Meccanica Razionale (Parte I)
23 settembre 2004

Il ***candidato*** scriva nello spazio sottostante il proprio Cognome e Nome.

COGNOME **NOME**

La ***prova*** consta di **4** Quesiti e durerà **2** ***ore***. ***Non è permesso*** consultare testi od appunti, al di fuori di quelli distribuiti dalla Commissione.
La ***risposta*** a ciascuno di essi va scelta *esclusivamente* tra quelle già date nel testo, annerendo *un solo* circoletto ◯. Una sola è la risposta corretta. Qualora sia data più di una risposta allo stesso quesito, questa sarà considerata errata, anche se una delle risposte date è corretta.
I ***punteggi*** per ciascun quesito sono dichiarati in *trentesimi* sul testo, nel seguente formato

{E,NE,A}

dove **E** è il punteggio assegnato in caso di risposta *Esatta*, **NE** quello in caso di risposta *Non Esatta* e **A** quello in caso di risposta *Assente*. L'esito finale della prova è determinato dalla somma *algebrica* dei punteggi parziali. Spazio riservato alla Commissione. *Non scrivere nelle caselle sottostanti!*

ESITO			

QUESITI

Q1. *Due aste omogenee OA ed OB sono libere di ruotare attorno al loro estremo comune O. L'asta OA ha massa m e lunghezza ℓ mentre OB ha massa βm e lunghezza $\alpha\ell$ (Figura 1). Entrambe le aste sono allineate lungo $\boldsymbol{e}_y$ all'istante $t = 0$ e, a partire da tale istante eseguono una rotazione uniforme: OA con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_0 = -\omega_0\boldsymbol{e}_z$ ed OB con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_1 = -12\omega_0\boldsymbol{e}_z$. Trovare l'espressione del momento di inerzia delle due aste rispetto all'asse passante per O, diretto lungo $\boldsymbol{e}_y$.*

{5,-1,0}

Soluzione

◯ $I_{Oy} = \frac{m\ell^2}{3}(\sin^2\omega_0 t + \beta\alpha^2\sin^2 12\omega_0 t)$
◯ $I_{Oy} = \frac{m\ell^2}{3}(\sin^2\omega_0 t + \beta\alpha^2\sin^2 12\omega_0 t)$

Q2. *Dati i tensori:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{A} = (\boldsymbol{e}_x - \alpha\boldsymbol{e}_y)\otimes\boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{e}_y + \beta\boldsymbol{e}_z)\otimes\boldsymbol{e}_z \end{cases}$$

trovare l'espressione del tensore $\boldsymbol{L} := (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2 = (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$.

{5,-1,0}

Soluzione

◯ $\boldsymbol{L} = (\boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_x - \alpha \boldsymbol{e}_y \otimes \boldsymbol{e}_x + \beta \boldsymbol{e}_y \otimes \boldsymbol{e}_z + \beta^2 \boldsymbol{e}_z \otimes \boldsymbol{e}_z)$
◯ $\boldsymbol{L} = (\boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_x - \alpha \boldsymbol{e}_y \otimes \boldsymbol{e}_x + \beta \boldsymbol{e}_y \otimes \boldsymbol{e}_z + \beta^2 \boldsymbol{e}_z \otimes \boldsymbol{e}_z)$

Q3. *Si consideri un corpo rigido $\mathcal{B}$ di massa m. Se $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità angolare di $\mathcal{B}$, G il centro di massa di $\mathcal{B}$, $\boldsymbol{v}_O \neq \boldsymbol{0}$ la velocità di un punto O di $\mathcal{B}$ diverso da G e $\mathbb{I}_O$ il tensore di inerzia di $\mathcal{B}$ rispetto ad O, quale tra le seguenti è l'espressione corretta per l'energia cinetica T di $\mathcal{B}$*

{5,-1,0}

Risposta

◯ $T = \frac{1}{2} m v_O^2 + \frac{1}{2} \mathbb{I}_O \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} + m \boldsymbol{v}_O \cdot \boldsymbol{\omega} \wedge (G - O)$
◯ $T = \frac{1}{2} m v_O^2 + \frac{1}{2} \mathbb{I}_O \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}$
◯ $T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} \mathbb{I}_O \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}$
◯ $T = \frac{1}{2} \mathbb{I}_O \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}$

Q4. *In un piano verticale, un'asta omogenea OA di massa αm e lunghezza $\beta \ell$ è incernierata in O ad un punto fisso. In A agisce una forza elastica di costante $\gamma m g / \ell$ sempre diretta lungo la verticale (Figura 3). Quanto vale l'angolo ϑ formato dall'asta con la verticale nella configurazione di equilibrio stabile?*

{5,-1,0}

Soluzione

◯ $\vartheta = 0$
◯ $\vartheta = \arccos \frac{\alpha}{2\gamma\beta^2}$

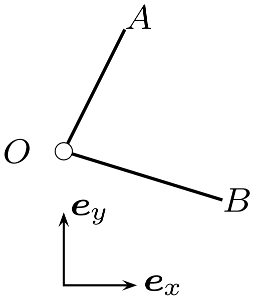

Fig. 1

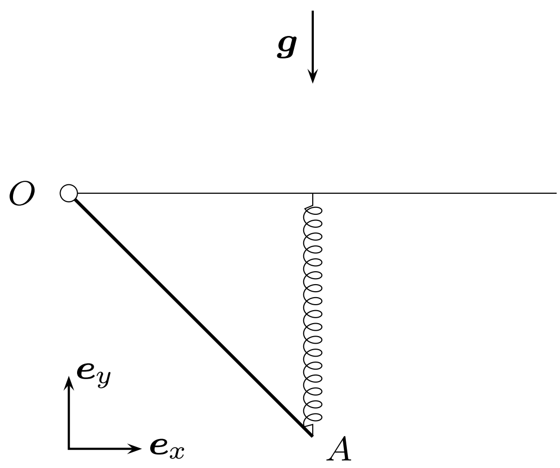

Fig. 2