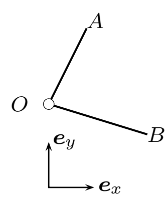
Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Esame di Meccanica Razionale
Appello del 23 settembre 2004
Soluzioni (Parte I)

Q1. *Due aste omogenee OA ed OB sono libere di ruotare attorno al loro estremo comune O. L'asta OA ha massa m e lunghezza ℓ mentre OB ha massa $4m$ e lunghezza 2ℓ. Entrambe le aste sono allineate lungo $\boldsymbol{e}_y$ all'istante $t = 0$ e, a partire da tale istante eseguono una rotazione uniforme: OA con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_0 = -\omega_0 \boldsymbol{e}_z$ ed OB con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_1 = -12\omega_0 \boldsymbol{e}_z$. Trovare l'espressione del momento di inerzia delle due aste rispetto all'asse passante per O, diretto lungo $\boldsymbol{e}_y$.*



Sia $\boldsymbol{n}$ il versore associato ad OA ed $\boldsymbol{e}$ quello associato ad OB. Dalle condizioni iniziali segue che

$$\boldsymbol{n}(t) = \sin \omega_0 t \boldsymbol{e}_x + \cos \omega_0 t \boldsymbol{e}_y$$

ed

$$\boldsymbol{e}(t) = \sin 12\omega_0 t \boldsymbol{e}_x + \cos 12\omega_0 t \boldsymbol{e}_y \,.$$

Il momento di inerzia cercato è

$$I_{Oy} = \boldsymbol{e}_y \cdot \mathbb{I}_O \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_y \cdot (\mathbb{I}_O^{OA} + \mathbb{I}_O^{OB}) \boldsymbol{e}_y$$

dove

$$\mathbb{I}_O^{OA} = \frac{1}{3} m\ell^2 (\mathbf{I} - \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n})$$

è il tensore di inerzia di OA rispetto ad O ed

$$\mathbb{I}_O^{OB} = \frac{16}{3} m\ell^2 (\mathbf{I} - \boldsymbol{e} \otimes \boldsymbol{e}) \,.$$

Dalle espressioni di $\boldsymbol{n}(t)$ ed $\boldsymbol{e}(t)$ appena ricavate, otteniamo

$$I_{Oy} = \frac{1}{3} m\ell^2 [\sin^2 \omega_0 t + 16 \sin^2 12\omega_0 t] \,.$$

Q2. *Dati i tensori:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{A} = (\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y) \otimes \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{e}_y - 4\boldsymbol{e}_z) \otimes \boldsymbol{e}_z \end{cases}$$

trovare l'espressione del tensore $\boldsymbol{L} := (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2 = (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$.

Applicando ripetutamente l'identità $(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b})(\boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{d}$ otteniamo

$$\boldsymbol{L} = (\boldsymbol{e}_x\otimes\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y\otimes\boldsymbol{e}_x - 4\boldsymbol{e}_y\otimes\boldsymbol{e}_z + 16\boldsymbol{e}_z\otimes\boldsymbol{e}_z)\,.$$

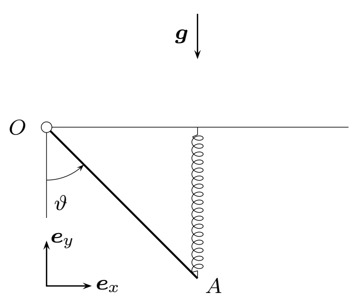
Q3. *Si consideri un corpo rigido $\mathcal{B}$ di massa m. Se $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità angolare di $\mathcal{B}$, G il centro di massa di $\mathcal{B}$, $\boldsymbol{v}_O \neq \boldsymbol{0}$ la velocità di un punto O di $\mathcal{B}$ diverso da G e $\mathbb{I}_O$ il tensore di inerzia di $\mathcal{B}$ rispetto ad O, quale tra le seguenti è l'espressione sempre corretta per l'energia cinetica T di $\mathcal{B}$?*

◯ $T = \frac{1}{2}mv_O^2 + \frac{1}{2}\mathbb{I}_O\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} + m\boldsymbol{v}_O\cdot\boldsymbol{\omega}\wedge(G-O)$ ◯ $T = \frac{1}{2}mv_O^2 + \frac{1}{2}\mathbb{I}_O\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}$
◯ $T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\mathbb{I}_O\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}$ ◯ $T = \frac{1}{2}\mathbb{I}_O\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}$ ◯ $T = \frac{1}{2}\mathbb{I}_O\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{\omega}$
◯ $T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\mathbb{I}_O\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{\omega}$ ◯ $T = \mathbb{I}_O\boldsymbol{\omega}$ ◯ $T = m\boldsymbol{v}_O\cdot\boldsymbol{\omega}\wedge(G-O)$

Grazie al teorema di König, l'espressione corretta di T è

$$T = \frac{1}{2}mv_O^2 + \frac{1}{2}\mathbb{I}_O\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} + m\boldsymbol{v}_O\cdot\boldsymbol{\omega}\wedge(G-O)\,.$$

Q4. *In un piano verticale, un'asta omogenea OA di massa $3m$ e lunghezza 3ℓ è incernierata in O ad un punto fisso. In A agisce una forza elastica di costante $4mg/\ell$ sempre diretta lungo la verticale. Quanto vale l'angolo ϑ formato dall'asta con la verticale nella configurazione di equilibrio stabile?*



L'energia potenziale V è formata da due contributi: uno, $-\frac{9}{2}mg\ell\cos\vartheta$, dovuto alla forza peso e l'altro, $18mg\ell\cos^2\vartheta$, dovuto alla forza elastica che agisce su A. In definitiva, occorre trovare il minimo della funzione

$$V(\vartheta) = -\frac{9}{2}mg\ell\cos\vartheta + 18mg\ell\cos^2\vartheta\,.$$

I punti stazionari di V risolvono l'equazione

$$V'(\vartheta) = 9mg\ell\sin\vartheta(\frac{1}{2} - 4\cos\vartheta)$$

e corrispondono ai valori $\vartheta = 0$, $\vartheta = \pi$, $\vartheta = \arccos \frac{1}{8}$. Per trovare il minimo calcoliamo i valori assunti dalla derivata seconda di V in tali punti. In generale,

$$V''(\vartheta) = 9mg\ell[\cos\vartheta(\frac{1}{2} - 4\cos\vartheta) + 4\sin^2\vartheta]$$

da cui segue

$$V''(0) = -\frac{63}{2}mg\ell < 0\,,$$

$$V''(\pi) = -\frac{81}{2}mg\ell$$

e

$$V''(\arccos\frac{1}{8}) = \frac{567}{16}mg\ell > 0\ :$$

quest'ultima configurazione è dunque quella di equilibrio stabile.