

Università di Pavia  
 Facoltà di Ingegneria  
 Esame di Meccanica Razionale  
 Appello del 25 settembre 2003  
**Soluzioni: parte II**

**Q1.** Dati i tensori  $\mathbf{A} = \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_z - \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z$ ,  $\mathbf{B} = 3\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y - \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + 2\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_x$  e  $\mathbf{C} = \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_x - \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_y$  calcolare  $\mathbf{ABC}$ .

Ricordiamo anzitutto la regola di contrazione delle diadi:

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})(\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} \otimes \mathbf{d}; \quad (1)$$

il prodotto fra tensori, come quello fra matrici, è associativo, quindi non importa l'ordine con il quale eseguiamo i due prodotti, purché non venga cambiato, invece, l'ordine dei fattori (poiché, al contrario, l'operazione **non** gode della proprietà commutativa). Possiamo, quindi, calcolare prima  $\mathbf{BC}$  e poi moltiplicare  $\mathbf{A}$  per il risultato; sfruttando le proprietà di ortonormalità dei versori e la (1), abbiamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{BC} &= (3\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y - \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + 2\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_x)(\mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_x - \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_y) \\ &= 3(\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y)(\mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_x) - (\mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y)(\mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_x) - (2\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_x)(\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_z) \\ &= 3\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_x - 2\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z, \end{aligned} \quad (2)$$

e, quindi,

$$\begin{aligned} \mathbf{ABC} &= \mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_z - \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z)(3\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_x - 2\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z) \\ &= 3(\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x)(\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x) - 4(\mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_z)(\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z) + 2(\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z)(\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z) \\ &= 3\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x - 4\mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_z + 2\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (3)$$

**Q2.** Un sistema  $\mathcal{B}$  è formato da  $n$  corpi rigidi interagenti e vincolati reciprocamente nello spazio tridimensionale ( $n > 1$ ). Sia  $\mathcal{F}$  un sistema di forze attive applicate in diversi punti del sistema. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

(Presentiamo di seguito le affermazioni proposte nel tema d'esame e ne discutiamo la validità caso per caso; chiameremo  $\mathcal{I}$  il trinomio invariante del sistema  $\mathcal{F}$ ):

Se i punti di applicazione di  $\mathcal{F}$  giacciono in un piano, il trinomio invariante del sistema  $\mathcal{F}$  è nullo.

Falso: sarebbe vera se fossero tutte le rette di applicazione delle forze a giacere in un piano, che, però, è diverso da quanto affermato. Basta considerare due forze (non nulle): i loro punti di applicazioni sono in infiniti piani; siano questi punti distinti: se le rette d'azione delle forze sono sghembe, il trinomio invariante è non nullo (basta calcolare il momento del sistema scegliendo come polo uno dei punti di applicazione: in generale il momento non è ortogonale al risultante e, quindi  $\mathcal{I}$  non è nullo).

Se il risultante di  $\mathcal{F}$  è nullo, esiste l'asse centrale del sistema  $\mathcal{F}$ .

Falso: se il risultante è nullo, l'asse centrale non è definito.

Se i vincoli sono perfetti, il momento totale delle forze vincolari è nullo.

Falso: basta considerare come vincolo un manicotto: in generale la reazione vincolare è costituita da una forza e da una coppia, equivalente a un momento, entrambi ortogonali alla retta di scorrimento del vincolo, quindi il momento delle forze vincolari in generale non è nullo (eppure il vincolo è perfetto).

○ Se il trinomio invariante del sistema  $\mathcal{F}$  è nullo, il risultante del sistema  $\mathcal{F}$  è sempre nullo.

Falso: come controesempio basta prendere un sistema di forze giacenti in un piano; questo ha momento totale ortogonale al piano e, in generale, risultante non nullo:  $\mathcal{I}$ , tuttavia, risulta nullo (è vera, invece l'implicazione opposta, ovviamente).

○ Se il trinomio invariante del sistema  $\mathcal{F}$  è nullo, esiste sempre una retta passante per  $O$  rispetto ai punti della quale il momento del sistema  $\mathcal{F}$  è nullo.

Falso: nel caso di una coppia, il trinomio invariante del sistema  $\mathcal{F}$  è nullo, eppure il momento del sistema di forze (che è indipendente dal polo scelto) è, in generale, non nullo.

○ Se il momento del sistema  $\mathcal{F}$  rispetto ad un polo  $O$  è nullo, esiste una retta passante per  $O$  rispetto ai punti della quale il momento del sistema  $\mathcal{F}$  è nullo.

Vero: se il risultante non è nullo, la retta cercata è l'asse centrale; altrimenti, il momento sarebbe nullo qualunque polo venisse scelto, e, pertanto, ogni retta passante per  $O$ , in generale, soddisferebbe le richieste.

**Q3.** In una lamina omogenea piana quadrata  $ABCD$  di massa  $m$  e lato  $10R$  viene praticato un foro circolare di raggio  $2R$  avente il centro  $O$  distante  $4R$  dai lati  $AB$  e  $AD$  (Figura 1). Per il corpo così ottenuto, calcolare la differenza  $\Delta\mathcal{I}$  fra il momento d'inerzia rispetto all'asse diagonale  $AC$  e quello rispetto all'asse diagonale  $BD$ .

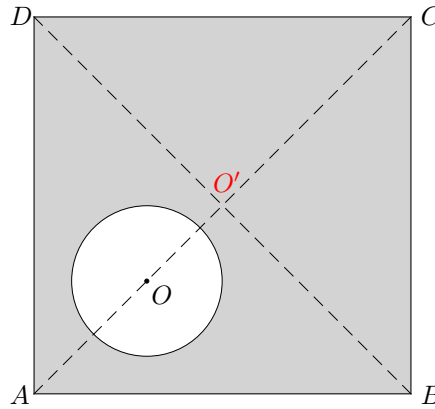


Fig. 1

Anzitutto, ricordiamo che, per calcolare il momento d'inerzia  $I_u$  di un corpo rispetto ad un asse  $u$ , basta considerare il tensore d'inerzia rispetto ad un qualunque punto  $P$  dell'asse: detto  $\mathbf{u}$  un versore diretto come l'asse e  $\mathbb{I}_P$  il tensore d'inerzia calcolato in  $P$ , si ha  $I_u = \mathbf{u} \cdot \mathbb{I}_P \mathbf{u}$ ; il risultato è indipendente dal punto  $P$  scelto sull'asse  $u$ . Con questa osservazione, e mediante l'ausilio dei due versori

$$\mathbf{e}_{AC} := \frac{A - C}{|A - C|} \quad \text{e} \quad \mathbf{e}_{BD} := \frac{B - D}{|B - D|} \quad (4)$$

possiamo esplicitare la quantità da calcolare per risolvere l'esercizio come:

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{I} &:= I_{AC} - I_{BD}, \\ \text{con} \quad I_{AC} &:= \mathbf{e}_{AC} \cdot \mathbb{I}_A \mathbf{e}_{AC} \\ \text{e} \quad I_{BD} &:= \mathbf{e}_{BD} \cdot \mathbb{I}_B \mathbf{e}_{BD}. \end{aligned} \quad (5)$$

In realtà, non è necessario calcolare tutte le quantità presenti nella (5); ricorrendo al *principio della lacuna*, possiamo determinare i momenti di inerzia del corpo come differenza fra quelli della lamina quadrata “piena” e quelli del disco asportato; indicando con una  $Q$  in apice le proprietà che si riferiscono al quadrato, con  $D$  quelle del disco e con  $C$  quelle del corpo ottenuto dalla “differenza” fra i due, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{I} &= I_{AC}^{(C)} - I_{BD}^{(C)} = [I_{AC}^{(Q)} - I_{AC}^{(D)}] - [I_{BD}^{(Q)} - I_{BD}^{(D)}] \\ &= I_{BD}^{(D)} - I_{AC}^{(D)}, \end{aligned} \quad (6)$$

poiché, per simmetria,  $I_{AC}^{(Q)} = I_{BD}^{(Q)}$ ; a questo punto, possiamo utilizzare la formula di HUYGENS-STEINER per calcolare  $I_{BD}^{(D)}$ : indicando con  $I_O^{(D)}$  il momento centrale di inerzia del disco rispetto a una qualunque direzione nel piano della lamina e con  $m^{(D)}$  la massa del disco asportato, e ponendo  $d := |O - O'|$  (con  $O'$  punto di intersezione delle diagonali  $AC$  e  $BD$ ) abbiamo:

$$\Delta\mathcal{I} = I_O^{(D)} + m^{(D)}d^2 - I_{AC}^{(D)} = m^{(D)}d^2, \quad (7)$$

dove abbiamo fatto uso del fatto che, per ovvie ragioni di simmetria:

$$I_{AC}^{(D)} = \mathbf{e}_{AC} \cdot \mathbb{I}_A^{(D)} \mathbf{e}_{AC} = \mathbf{e}_{AC} \cdot \mathbb{I}_O^{(D)} \mathbf{e}_{AC} = I_O^{(D)}. \quad (8)$$

A questo punto, il calcolo da fare è molto semplice; se indichiamo con  $\sigma$  la densità superficiale di massa della lamina quadrata originale, abbiamo

$$\sigma = \frac{m}{100R^2}$$

e, quindi

$$m^{(D)} = \sigma\pi 4R^2 = \frac{\pi m}{25}, \quad (9)$$

e, dunque, sfruttando la (7) e la (9), nonché semplici considerazioni di geometria piana:

$$\Delta\mathcal{I} = m^{(D)}d^2 = \frac{\pi m}{25}[2(5R - 4R)^2] = \frac{2}{25}\pi m R^2. \quad (10)$$

**Q4.** In un piano verticale, una lamina omogenea di massa  $\alpha m$  con forma di triangolo rettangolo di cateti  $AB = 3\sqrt{3}R$  e  $AC = 3R$  ha il lato  $AB$  vincolato a scorrere su una guida orizzontale. Una molla di massa trascurabile e lunghezza a riposo nulla, avente costante elastica  $\frac{mg}{R}$ , attrae il vertice  $A$  verso un punto fisso alla stessa quota. Sull'ipotenusa della lamina si può muovere, con vincolo di puro rotolamento, un disco omogeneo di massa  $2m$  e raggio  $R$ , il cui centro  $O$  è soggetto alla forza di una seconda molla di massa trascurabile e lunghezza a riposo nulla, avente costante elastica  $\frac{mg}{R}$ , disposta parallelamente a  $BC$  e fissata ad un sostegno ortogonale ad esso in  $C$  (vedi Figura 2). Dire a quale valore tende la media aritmetica delle pulsazioni delle piccole oscillazioni in un intorno della posizione di equilibrio stabile quando  $\alpha \rightarrow \infty$ .

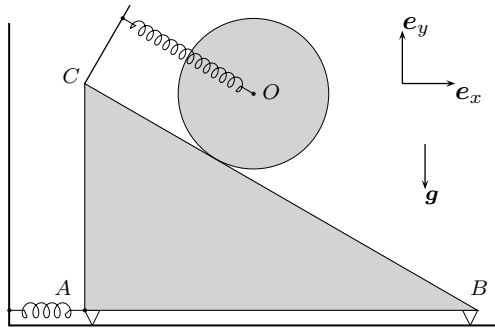
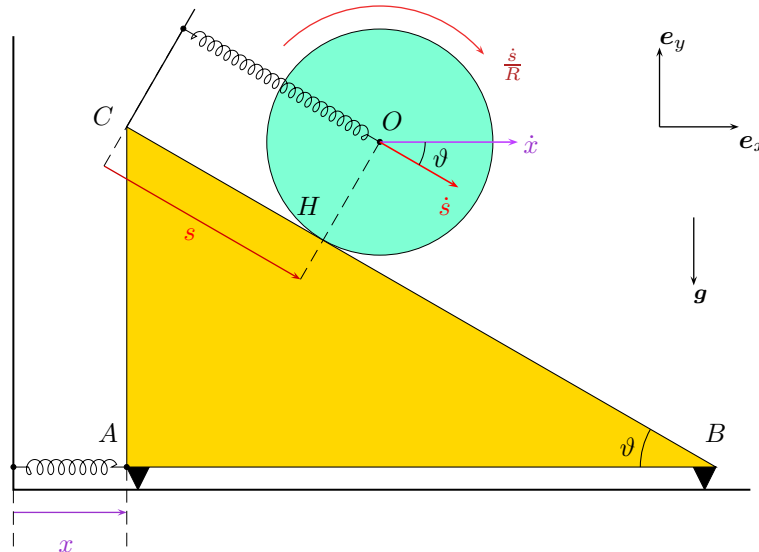


Fig. 2

Si tratta di un problema di modi normali, che affronteremo per intero nella maniera tradizionale; successivamente, vedremo come la quantità richiesta può essere calcolata anche in modo rapido, senza i dettagli presentati di seguito.

Il sistema due gradi di libertà: possiamo associarli alle coordinate lagrangiane corrispondenti all'ascissa  $x$  di  $A$  lungo la direzione  $e_x$ , misurata a partire dal punto cui è fissata la prima molla e all'ascissa  $s$  del punto  $H$  di contatto fra disco e lamina triangolare, misurata lungo  $BC$  a partire da  $C$  (si veda la figura sottostante per il dettaglio).



Con semplici considerazioni trigonometriche otteniamo che l'angolo  $\vartheta$  in  $B$  della lamina ha ampiezza  $\pi/6$ ; in termini delle coordinate introdotte, le velocità di  $O$ , centro di massa del disco, e di  $A$  sono:

$$\mathbf{v}_A = \dot{x} \mathbf{e}_x$$

e

$$\mathbf{v}_O = (\dot{x} + \dot{s} \cos \vartheta) \mathbf{e}_x - \dot{s} \sin \vartheta \mathbf{e}_y, \quad (11)$$

la condizione di puro rotolamento per il disco impone, quindi, che la sua velocità angolare

sia

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{\dot{s}}{R}\mathbf{e}_z. \quad (12)$$

Per i vincoli posti, l'atto di moto della lamina è traslatorio, quindi la  $\mathbf{v}_A$  è anche la velocità del suo centro di massa; per quanto riguarda il disco, possiamo scrivere il suo contributo all'energia cinetica totale  $T$  usando il teorema di KÖNIG. in base a ciò, otteniamo:

$$\begin{aligned} T = T(x, s, \dot{x}, \dot{s}) &= \frac{1}{2}\alpha m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}2mR^2\left(\frac{\dot{s}}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}2m[(\dot{x} + \dot{s}\cos\vartheta)^2 + (\dot{s}\sin\vartheta)^2] \\ &= \frac{1}{2}\alpha m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + m\dot{x}^2 + 2m\dot{x}\dot{s}\cos\vartheta \\ &= \frac{1}{2}(\alpha + 2)m\dot{x}^2 + \frac{3}{2}m\dot{s}^2 + \sqrt{3}m\dot{x}\dot{s}. \end{aligned} \quad (13)$$

Per quanto riguarda l'energia potenziale totale  $V$ , oltre a quella delle due molle dobbiamo contare l'energia potenziale gravitazionale del disco (la quota del centro di massa della lamina triangolare, invece, rimane costante: essendo l'energia potenziale definita a meno di una costante additiva, possiamo considerare nullo il contributo della lamina a  $V$ ). La quota  $h$  di  $O$  risulta essere:

$$h = y_0 - s\sin\vartheta = -\frac{s}{2}, \quad (14)$$

dove abbiamo posto  $y_0 = 0$ , cosa sempre possibile scegliendo opportunamente l'origine delle ordinate nel sistema di riferimento. Complessivamente otteniamo per l'energia potenziale  $V$ , a meno di costanti:

$$\begin{aligned} V = V(x, s) &= \frac{1}{2}\frac{mg}{R}x^2 + \frac{1}{2}\frac{mg}{R}s^2 + 2mgh \\ &= \frac{1}{2}\frac{mg}{R}(x^2 + s^2) - mgs. \end{aligned} \quad (15)$$

Le configurazioni di equilibrio si trovano annullando il gradiente di  $V(x, s)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{mgx}{R} = 0 &\quad \Rightarrow \quad x_0 = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial s} = \frac{mgs}{R} - mg = 0 &\quad \Rightarrow \quad s_0 = R; \end{aligned} \quad (16)$$

avendo indicato con  $(x_0, s_0)$  l'unica configurazione di equilibrio esistente. Per trovare le pulsazioni dei modi normali, dobbiamo procedere alla diagonalizzazione simultanea delle forme quadratiche associate alle matrici  $A$  e  $B$  i cui elementi sono così definiti, rispettivamente:

$$A_{ij} = \left. \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right|_{q=q_0} \quad (17a)$$

$$B_{ij} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q=q_0} \quad (17b)$$

dove, per brevità, abbiamo posto  $q := (q_1, q_2) := (x, s)$ ; otteniamo:

$$A = \begin{pmatrix} (\alpha + 2)m & \sqrt{3}m \\ \sqrt{3}m & 3m \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{mg}{R} & 0 \\ 0 & \frac{mg}{R} \end{pmatrix} \quad (18)$$

anzitutto, notiamo che la matrice hessiana dell'energia potenziale (17b) è definita positiva, cosa che permette subito di affermare che al configurazione di equilibrio trovata è effettivamente stabile. Risolviamo ora l'equazione caratteristica in  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda A) &= \begin{bmatrix} \frac{mg}{R} - \lambda(\alpha + 2)m & -\sqrt{3}\lambda m \\ -\sqrt{3}\lambda m & \frac{mg}{R} - 3\lambda m \end{bmatrix} \\ &= m^2 \left( \frac{g}{R} - \lambda(\alpha + 2) \right) \left( \frac{g}{R} - 3\lambda \right) - 3\lambda^2 m^2 = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

ossia, ponendo  $\tilde{\lambda} := R\lambda/g$  per snellire la notazione,

$$3(\alpha + 1)\tilde{\lambda}^2 - (\alpha + 5)\tilde{\lambda} + 1 = 0. \quad (20)$$

Le pulsazioni delle piccole oscillazioni in un intorno della posizione di equilibrio stabile  $\omega_{1,2}$  si trovano prendendo le radici quadrate delle radici della (19). La loro media  $\mu$  è:

$$\mu := \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \frac{\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2}}{2}; \quad (21)$$

in realtà, non è neppure necessario risolvere la (19), poichè, considerando il quadrato di ambo i membri della (21) si ha

$$\mu^2 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{4} + \frac{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}{2}, \quad (22)$$

e la somma e il prodotto delle radici  $\lambda_{1,2}$  si ottengono direttamente dai coefficienti della (19), o, meglio, della (20). Otteniamo, così:

$$\mu^2 = \left( \frac{g}{R} \right) \left( \frac{\alpha + 5}{12(\alpha + 1)} + \frac{1}{3(\alpha + 1)} \right), \quad (23)$$

e, per il limite richiesto:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \mu^2 = \frac{1}{12} \left( \frac{g}{R} \right). \quad (24)$$

Prendendo le radici quadrate nella (24) ricaviamo, finalmente, il valore limite  $\mu_\infty$  della media richiesto:

$$\mu_\infty = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{g}{R}}. \quad (25)$$

Come avevamo anticipato all'inizio, il risultato della (25) si può ottenere in modo molto rapido se osserviamo che, per  $\alpha \rightarrow \infty$ , la lamina triangolare tenderà a muoversi con velocità nulla: a questo punto, una delle pulsazioni di oscillazione diventa nulla, e l'altra corrisponde a quella del disco che rotola senza strisciare sulla guida obliqua fissa costituita dall'ipotenusa  $BC$ , sotto l'azione della seconda molla. Il problema è molto semplice adesso; l'energia cinetica  $\bar{T}$  del disco è:

$$\bar{T}(\dot{s}) = \frac{1}{2} \frac{3}{2} 2m\dot{s}^2 = \frac{3}{2} m\dot{s}^2 \quad (26)$$

(come si può ottenere anche dalla (13) con  $\dot{x} = 0$ ); per quanto riguarda l'energia potenziale  $\bar{V}$  avremo:

$$\bar{V}(s) = \frac{1}{2} \frac{mg}{R} s^2 - mgs. \quad (27)$$

Ora, la pulsazione  $\omega_\infty$  delle piccole oscillazioni si ottiene semplicemente come

$$\omega_\infty = \sqrt{\frac{T''(\dot{s})|_{s=s_0}}{V''(s)|_{s=s_0}}} = \sqrt{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{g}{R}}, \quad (28)$$

e la media fra la pulsazione della (28) e la pulsazione nulla dà proprio il risultato cercato (25).