Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Esame di Meccanica Razionale
Appello del 26 febbraio 2004
Soluzioni (Parte I)

Q2. *In un atto di moto rigido, dove* $\boldsymbol{v}_O$ *è la velocità del punto* O *ed* $\boldsymbol{\omega}$ *la velocità angolare, qual è l'espressione corretta della potenza complessiva* W *di un sistema di forze di risultante* $\boldsymbol{R}$ *e momento risultante* $\boldsymbol{M}_O$ *rispetto ad* O *?*
L'espressione corretta è

$$W = \boldsymbol{v}_O \cdot \boldsymbol{R} + \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{M}_O\,.$$

Q2. *Determinare il versore binormale alla curva*

$$p(t) - o = t\boldsymbol{e}_x + (\mathrm{e}^t - 1)\boldsymbol{e}_y + (\mathrm{e}^{3t} - 1)\boldsymbol{e}_z$$

per $t = 0$.

Il versore binormale $\boldsymbol{b}$ è il prodotto vettoriale del versore tangente $\boldsymbol{t} = \frac{\dot{p}}{|\dot{p}|}$ con il versore normale principale $\boldsymbol{n}$, dove $\dot{p}$ è la derivata di $p(t) - o$ rispetto al parametro t. Poiché

$$c\boldsymbol{n} = \frac{1}{|\dot{p}|^2}[\ddot{p} - \frac{(\dot{p}\cdot\ddot{p})\dot{p}}{|\dot{p}|^2}],$$

dove la curvatura c è data da

$$c = \frac{|\dot{p}\wedge\ddot{p}|}{|\dot{p}|^3}\,,$$

ricaviamo

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{c}\frac{1}{|\dot{p}|^2}[\ddot{p} - \frac{(\dot{p}\cdot\ddot{p})\dot{p}}{|\dot{p}|^2}]\,,$$

cioè

$$\boldsymbol{n} = \frac{|\dot{p}|}{|\dot{p}\wedge\ddot{p}|}[\ddot{p} - \frac{(\dot{p}\cdot\ddot{p})\dot{p}}{|\dot{p}|^2}]$$

per cui abbiamo

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{t}\wedge\boldsymbol{n} = \frac{\dot{p}}{|\dot{p}|}\wedge\boldsymbol{n} = \frac{\dot{p}\wedge\ddot{p}}{|\dot{p}\wedge\ddot{p}|}\,.$$

Inserendo i dati del problema, ricaviamo

$$\dot{p} = \boldsymbol{e}_x + \mathrm{e}^t\boldsymbol{e}_y + 3\mathrm{e}^{3t}\boldsymbol{e}_z$$

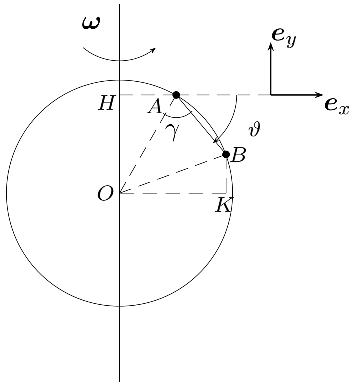
e

$$\ddot{p} = \mathrm{e}^t\boldsymbol{e}_y + 9\mathrm{e}^{3t}\boldsymbol{e}_z$$

e dunque

$$\boldsymbol{b} = \frac{1}{\sqrt{118}}[6\boldsymbol{e}_x - 9\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z]\,.$$

Q3. *Due punti materiali di A e B di ugual massa $2m$ sono vincolati a muoversi senza attrito su di una guida circolare di raggio R, rimanendo alla distanza fissa $\ell = \frac{4}{3}R$. La guida ruota uniformemente intorno ad un suo diametro con velocità angolare ω. Per quale o quali valori dell'angolo $\vartheta \in (-\pi, \pi]$ indicato in figura le configurazioni di equilibrio relativo dei due punti sono stabili?*



L'energia potenziale V delle forze centrifughe, sole forze attive presenti, è

$$V = -2m\omega^2[d_B^2 + d_B^2]\,,$$

dove d_A e d_B sono le distanze dei punti materiali A e B dall'asse di rotazione. Sia O il centro della guida circolare ed indichiamo con γ l'angolo OAB. Dai dati del problema, visto che il triangolo OAB è isoscele in O, abbiamo $\cos\gamma = \frac{2}{3}$. Dal triangolo rettangolo OAH concludiamo inoltre che

$$d_A = R\cos(HAO) = R\cos(\pi - \vartheta - \gamma) = -R\cos(\vartheta + \gamma)\,.$$

Infine, dal triangolo rettangolo OKB otteniamo

$$d_B = R\cos(\gamma - \vartheta)\,.$$

Possiamo ora studiare l'energia potenziale come funzione di ϑ. Svolgendo alcuni passaggi algebrici si mostra che le configurazioni di equilibrio soddisfano l'equazione

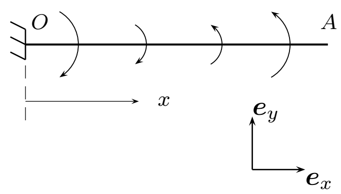
$$V' = 2m\omega^2R^2[\sin 2(\vartheta + \gamma) + \sin 2(\vartheta - \gamma)] = 4m\omega^2R^2\sin 2\vartheta\cos 2\gamma = 0$$

che è risolta da $\vartheta = 0, \pm\frac{\pi}{2}, \pi$. Per trovare le configurazioni stabili, studiamo il segno della derivata seconda di V,

$$V'' = 8m\omega^2R^2\cos 2\vartheta\cos 2\gamma\ :$$

poiché $\frac{\pi}{2} < 2\gamma < \pi$ si ha $\cos 2\gamma < 0$ e possiamo concludere che solo le configurazioni in cui $\vartheta = \pm\frac{\pi}{2}$ sono stabili.

Q4. *In un riferimento cartesiano ortogonale $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z)$, la configurazione indeformata di una verga euleriana di rigidezza flessionale $B = 40p\ell^2$ è il segmento $0 \le x \le \ell$ (Figura 1). La verga è incastrata in $x = 0$ e soggetta ad un sistema di coppie distribuite la cui densità per unità di lunghezza è $\boldsymbol{g} = 4p(\frac{x}{\ell} - 2)\boldsymbol{e}_z$. Dire quale sarà la freccia $y(\ell)$ all'estremo libero $x = \ell$, nell'approssimazione di piccole deflessioni.*



Detti $\boldsymbol{\Phi}$ e $\boldsymbol{\Gamma}$ lo sforzo interno ed il momento flettente nella verga, dalla teoria generale sappiamo che l'equilibrio della verga è garantito dalle equazioni

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Phi}' + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\Gamma}' + \boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{g} = \boldsymbol{0}\,, \end{cases}$$

dove un apice indica la derivazione rispetto all'ascissa curvilinea s lungo la verga, contata partendo da O. Grazie all'ipotesi di piccole deflessioni possiamo confondere s con x. Poiché non vi sono forze distribuite, abbiamo $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$; inoltre, l'assenza di carichi concentrati in A permette di concludere che $\boldsymbol{\Phi} \equiv \boldsymbol{0}$ lungo tutta la verga. Pertanto, la seconda equazione di equilibrio diventa

$$\boldsymbol{\Gamma}' + \boldsymbol{g} = \boldsymbol{0}\,.$$

Poiché la verga è euleriana, $\boldsymbol{\Gamma} = Bc\boldsymbol{b}$, dove c è la curvatura della verga e $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_z$ il suo versore binormale. Sfruttando ancora l'ipotesi di piccole deflessioni, possiamo scrivere $c = y''$ e così tradurre l'equazione di equilibrio nella forma

$$By''' = -4p(\frac{x}{\ell} - 2)\,,$$

che ha per soluzione generale

$$y = -\frac{2}{55\ell^2}(\frac{x^4}{24\ell} - \frac{x^3}{3}) + c_1 x^2 + c_2 x + c_3\,.$$

Per concludere, occorre imporre delle condizioni al contorno appropriate. All'estremo O, dove $x = 0$, la verga è incastrata e dunque deve essere $y(0) = 0$ ed $y'(0) = 0$.

L'estremo A, dove $x = \ell$, è invece libero, per cui $\mathbf{\Gamma}(\ell) = \mathbf{0}$ che si traduce nel richiedere $y''(\ell) = 0$. Imporre queste condizioni equivale a prendere $c_3 = 0$, $c_2 = 0$ e $c_1 = -\frac{3}{110\ell}$. Sostituendo questi valori nell'espressione di y, ricaviamo

$$y(\ell) = -\frac{\ell}{60}\,.$$