Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Esame di Meccanica Razionale
Appello del 26 febbraio 2004
Soluzioni: parte II

Q1. *Un corpo è formato da due aste omogenee: OC, di massa m e lunghezza 4ℓ, e AB, di massa m e lunghezza 6ℓ, saldate ad angolo retto in modo che O si trovi a distanza ℓ da A (Figura 1). Calcolare il momento centrale d'inerzia complessivo I_z nella direzione di un asse perpendicolare al piano contenente le due aste.*

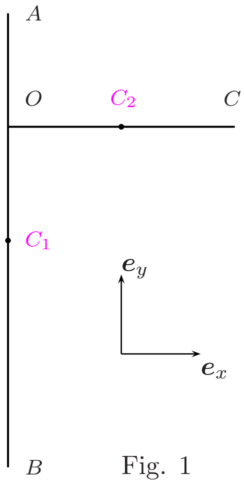

Fig. 1

Poiché viene chiesto di calcolare il momento centrale d'inerzia complessivo I_z, conviene scrivere il tensore centrale d'inerzia $\mathbb{I}_G$ (ossia calcolato nel centro di massa G del sistema) mediante il teorema di composizione, che consente di evitare di determinare esplicitamente la posizione di G; in base al teorema, usando l'indice $i = 1$ per ciò che si riferisce all'asta AB e $i = 2$ per ciò che si riferisce all'asta OC, possiamo scrivere che:

$$\mathbb{I}_G = \mathbb{I}_{C_1} + \mathbb{I}_{C_2} + \mu d^2 \left(\mathbf{I} - \boldsymbol{e} \otimes \boldsymbol{e}\right) , \tag{1}$$

dove $\mathbb{I}_{C_i}$ (con $i = 1, 2$) indica il tensore centrale d'inerzia di ciascun corpo (ossia calcolato nel rispettivo centro di massa), $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ è la massa ridotta del sistema, $d := |C_1 - C_2|$ è la distanza fra i due centri di massa delle aste ed $\boldsymbol{e} = \frac{C_1 - C_2}{d}$ è un versore diretto come la congiungente i due punti C_1 e C_2.

Il tensore centrale d'inerzia per ciascuna asta è:

$$\mathbb{I}_{C_i} = \frac{1}{12} \nu_i \lambda_i^2 \left(\mathbf{I} - \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_i\right) , \tag{2}$$

dove ν_i è la massa di ciascuna asta, λ_i la corrispondente lunghezza ed $\boldsymbol{e}_i$ un versore orientato come l'asta.

Non è necessario determinare esplicitamente i versori nelle (1, 2), poiché tutti giacciono nel piano di $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y\}$ e, quindi:

$$\boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{e}_2 = 0\,. \tag{3}$$

Il quadrato della distanza d può essere calcolato semplicemente dal triangolo rettangolo OG_1G_2; in base ai dati geometrici forniti, abbiamo:

$$d^2 = (\overline{OG_1})^2 + (\overline{OG_2})^2 = 4\ell^2 + 4\ell^2 = 8\ell^2\,; \tag{4}$$

la massa ridotta, inoltre, risulta essere

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m^2}{2m} = \frac{m}{2}\,. \tag{5}$$

Sostituendo le (4, 5) nella (1) otteniamo, ricordando le condizioni (3):

$$I_z = \boldsymbol{e}_z \cdot \mathbb{I}_C \boldsymbol{e}_z = \frac{1}{12} m(16\ell^2) + \frac{1}{12} m(36\ell^2) + \frac{1}{2} m(8\ell^2)\,, \tag{6}$$

cioè, svolgendo i calcoli:

$$I_z = \frac{25}{3} m\ell^2\,. \tag{7}$$

Q2. *Dati i tensori* $\mathbf{A} = -\boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_y \otimes \boldsymbol{e}_z$, *e* $\mathbf{B} = \boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z \otimes \boldsymbol{e}_y$, *calcolare* $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] := \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$.

Ricordando la regola di contrazione delle diadi

$$(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b})(\boldsymbol{c} \otimes \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{d}\,,$$

calcoliamo i due prodotti fra tensori:

$$\mathbf{AB} = -\boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_y \otimes \boldsymbol{e}_y \tag{8a}$$

$$\mathbf{BA} = -\boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_z - \boldsymbol{e}_z \otimes \boldsymbol{e}_z\,; \tag{8b}$$

dalle (8) si ha immediatamente:

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] := \mathbf{AB} - \mathbf{BA} = -\boldsymbol{e}_\mathbf{x} \otimes \boldsymbol{e}_\mathbf{y} - \boldsymbol{e}_\mathbf{y} \otimes \boldsymbol{e}_\mathbf{y} + \boldsymbol{e}_\mathbf{z} \otimes \boldsymbol{e}_\mathbf{z} - \boldsymbol{e}_\mathbf{x} \otimes \boldsymbol{e}_\mathbf{z}\,. \tag{9}$$

Alternativamente, si potrebbe rappresentare i tensori in forma matriciale, eseguire i prodotti fra matrici, e ritornare alla forma diadica dopo avere eseguito il calcolo della (9).

Q3. *La struttura rigida chiusa riportata in Figura 2 è posta in un piano verticale ed è composta da tre aste omogenee rettilinee. L'asta* OB*, di massa* $3m$ *e lunghezza* ℓ*, inclinata di* $\frac{\pi}{3}$ *sull'orizzontale, è incernierata a terra in* O*; l'asta* AO*, di massa trascurabile e lunghezza* ℓ*, disposta orizzontalmente, è incernierata a terra in* O *e vincolata in* A *da un carrello orizzontale; infine, l'asta* AB*, di massa trascurabile e lunghezza* ℓ*, ha gli estremi incernierati agli estremi corrispondenti delle altre aste. Se su* AB *agisce una coppia di momento* $\boldsymbol{M} = mg\ell\boldsymbol{e}_z$*, determinare il valore assoluto dello sforzo assiale cui è soggetta l'asta* OB *nel punto* O*.*

Cominciamo ad "aprire" la struttura staccando l'asta OB dalla cerniera a terra; sul punto O dell'asta, quindi, dobbiamo considerare applicata la reazione complessiva $\boldsymbol{\Phi} = \Phi_x\boldsymbol{e}_x + \Phi_y\boldsymbol{e}_y$, con

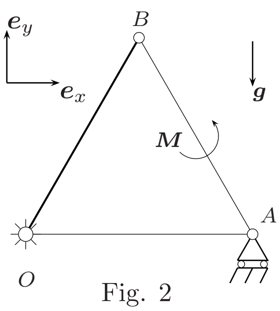

Fig. 2

due componenti incognite. Queste incognite possono essere determinate imponendo l'equilibrio del momento M_B^{OB} calcolato in B delle forze agenti sull'asta OB e quello del momento M_A^{ABO} in A delle forze agenti sulle aste OB e AB (si veda la Figura 2a):

$$M_B^{OB} := \boldsymbol{M}_B^{OB} \cdot \boldsymbol{e}_z = 3mg\frac{1}{4}\ell - \Phi_y\frac{1}{2}\ell + \Phi_x\frac{\sqrt{3}}{2}\ell = 0 \tag{10a}$$

$$M_A^{ABO} := \boldsymbol{M}_A^{ABO} \cdot \boldsymbol{e}_z = 3mg\frac{3}{4}\ell - \Phi_y\ell + mg\ell = 0\,. \tag{10b}$$

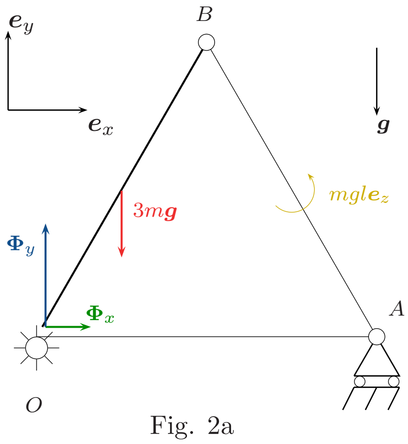

Fig. 2a

Dalla (10b) si ricava immediatamente il valore di Φ_y, che, sostituito nella (10a), permette di determinare Φ_x; a conti fatti si ha:

$$\Phi_x = \frac{7}{12}\sqrt{3}mg \tag{11a}$$

$$\Phi_y = \frac{13}{4}mg\,. \tag{11b}$$

Proiettando le (11) nella direzione di OB si ricava subito che l'asta è soggetta ad uno sforzo assiale N di compressione in O dato da:

$$N = \frac{1}{2}\Phi_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\Phi_y = \frac{23}{12}mg\sqrt{3}\,. \tag{12}$$

Q4. *In un piano verticale, una lamina, avente la forma di un triangolo rettangolo isoscele, omogenea di massa m e cateto ℓ ha il vertice dell'angolo retto C incernierato su un pianale AB orizzontale di massa $2m$ ed ha un altro vertice V appoggiato senza attrito su questo pianale. Il pianale è vincolato a scorrere lungo una guida orizzontale, ed il suo estremo A è attratto da una molla di costante elastica $2\frac{mg}{\ell}$ e lunghezza a riposo nulla verso un punto fisso O, posto alla sua stessa quota (Figura 3). Se, ad un dato istante, il sistema viene messo in moto a partire dalla quiete con $\overline{OA} =: x_0$, qual è il valore limite di x_0 compatibile con il contatto fra la lamina ed il pianale in V durante tutto il moto?*

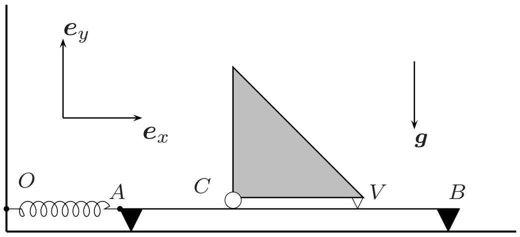

Fig. 3

Anzitutto, ricaviamo l'equazione oraria del moto del sistema, che, fino a che permane il contatto, si comporta come un unico corpo rigido; detta x l'ascissa di A rispetto ad O, possiamo scrivere l'equazione differenziale del moto usando la prima equazione cardinale della dinamica proiettata nella direzione $\boldsymbol{e}_x$:

$$(2m + m)\ddot{x} = 3m\ddot{x} = -2\frac{mg}{\ell}x\,; \tag{13}$$

integrando la (13) con le condizioni iniziali date nel testo, avendo posto

$$\omega_0^2 := \frac{2g}{3\ell}\,, \tag{14}$$

otteniamo:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)\,. \tag{15}$$

La reazione vincolare dovuta all'appoggio in V è data da una forza $\boldsymbol{\Phi} = \Phi\boldsymbol{e}_y$, con $\Phi \geq 0$. Poniamoci ora nel sistema di riferimento non inerziale solidale con il pianale AB; possiamo dire che sulla lamina agisce, allora, una forza apparente $\boldsymbol{f}_a = f_a\boldsymbol{e}_x = -2m\ddot{x}\boldsymbol{e}_x$; proiettando la seconda equazione cardinale della statica nella direzione perpendicolare al piano del sistema, otteniamo l'equilibrio dei momenti M_C^l calcolati rispetto a C delle forze agenti sulla lamina in questo riferimento (si veda la Figura 3a):

$$\begin{aligned} M_C^l = \boldsymbol{M}_C^l \cdot \boldsymbol{e}_z &= \Phi\ell - mg\frac{\ell}{3} - f_a\frac{\ell}{3} \\ &= \Phi\ell - mg\frac{\ell}{3} + m\ddot{x}\frac{\ell}{3} = 0\,, \end{aligned} \tag{16}$$

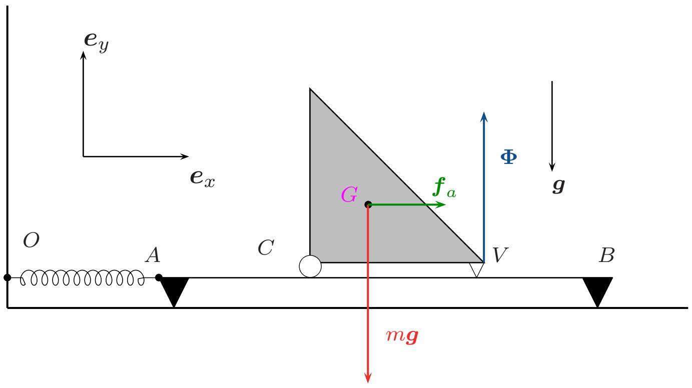

Fig. 3a

dove abbiamo sfruttato il fatto che il centro di massa G si trova all'interno del triangolo rettangolo, ad una distanza da ciascun cateto pari a $1/3$ della lunghezza dell'altro, e che, poiché il moto è traslatorio, la $\boldsymbol{f}_a$ può essere applicata in G.

Ricavando $\ddot{x}$ dalla (15) e sostituendo il risultato nella (16), possiamo risolvere quest'ultima equazione in Φ. La condizione di appoggio è verificata se:

$$\Phi(t) = \frac{1}{3}mg + \frac{1}{3}m\omega_0^2\, x_0 \cos(\omega_0 t) \geq 0 \qquad \forall t \in \left[0, \frac{2\pi}{\omega_0}\right] . \tag{17}$$

La (17) è verificata se la disuguaglianza è soddisfatta per il minimo di $\Phi(t)$, che occorre per $\cos(\omega_0 t) = -1$; il valore limite di x_0 richiesto è quello che rende nullo tale minimo, ossia, tenendo conto della (14):

$$x_0 = \frac{3}{2}\ell\,. \tag{18}$$