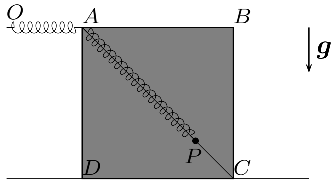
Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Esame di Meccanica Razionale
Appello del 26 giugno 2003
Soluzioni (Parte I)

Q1. *In un piano verticale, una lamina omogenea di massa m e lato ℓ può traslare su una guida ed il vertice A è attratto da una forza elastica di costante elastica $2\frac{mg}{\ell}$ verso un punto fisso O. Sulla diagonale AC è praticata una scanalatura entro cui può scorrere senza attrito un punto materiale P di massa $2m$ che a sua volta è attratto verso A da una forza elastica di costante $3\frac{mg}{\ell}$. Trovare le frequenze delle piccole oscillazioni in un intorno della posizione di equilibrio stabile.*



Usiamo come coordinate lagrangiane l'ascissa di A rispetto ad O e la distanza $s \in [0, \ell\sqrt{2}]$ di P da A. L'energia potenziale V è data da

$$V = mg[\frac{x^2}{\ell} + 3\frac{s^2}{2\ell} - s\sqrt{2}]$$

dove la quota di riferimento per l'energia gravitazionale è quella di O ed è stato trascurato il contributo costante dovuto al peso della lamina. Derivando la funzione V otteniamo

$$V_x = 2\frac{mg}{\ell}x \qquad V_s = 3\frac{mg}{\ell}s - mg\sqrt{2}$$

da cui concludiamo che la sola posizione di equilibrio corrisponde alla configurazione $x = 0$, $s = \frac{3}{2}\sqrt{2}$. La matrice hessiana corrispondente è

$$B = \begin{pmatrix} 2\frac{mg}{\ell} & 0 \\ 0 & 3\frac{mg}{\ell} \end{pmatrix}$$

da cui si osserva che la configurazione di equilibrio è in effetti stabile. L'energia cinetica consta di due contributi: quello dovuto alla lamina è $T_a = \frac{m}{2}\dot{x}^2$ dal momento che essa può solo traslare; il contributo ascrivibile al punto P va calcolato a partire derivando

$$P - O = (x + s\frac{\sqrt{2}}{2})\boldsymbol{e}_x - s\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{e}_y$$

rispetto al tempo, così da ottenere

$$T_P = m(\dot{x}^2 + \dot{s}^2 + \dot{s}\dot{x}\sqrt{2})$$

e quindi l'energia cinetica complessiva

$$T = \frac{3m}{2}\dot{x}^2 + m\dot{s}^2 + m\sqrt{2}\dot{x}\dot{s}\,.$$

La forma quadratica associata a T è

$$A = \begin{pmatrix} 3m & m\sqrt{2} \\ m\sqrt{2} & 2m \end{pmatrix}$$

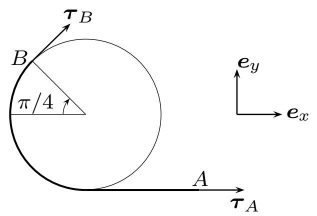
e per trovare le frequenze delle piccole oscillazioni occorre risolvere l''equazione $\det(\lambda A - B) = 0$ che in questo caso si riduce, semplificato un fattore m^2

$$4\lambda^2 - 13\frac{g}{\ell} + 6\frac{g^2}{\ell^2} = 0\,.$$

Le frequenze $\omega_\pm = \sqrt{\lambda_\pm}$ sono dunque

$$\omega_\pm = \sqrt{\frac{g}{\ell}}\left[\frac{13 \pm \sqrt{73}}{8}\right]^{1/2}\,.$$

Q2. *In assenza di forze attive esterne, un filo AB è avvolto in un piano attorno ad una circonferenza di raggio R ed è tenuto teso grazie alle forze $\boldsymbol{\tau}_A = 2p\boldsymbol{e}_x$ e $\boldsymbol{\tau}_B = p\boldsymbol{n}$, con $\boldsymbol{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y)$. Qual è il minimo coefficiente di attrito statico μ tra filo e circonferenza compatibile con l'equilibrio nelle condizioni descritte?*



Detta $s = R\vartheta$ l'ascissa curvilinea lungo il tratto appoggiato di filo, contata partendo dall'estremo inferiore, le equazioni indefinite di equilibrio per un filo richiedono

$$\begin{cases} \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\vartheta} + \phi_t = 0 \\ \frac{\tau}{R} + \phi_n = 0 \end{cases}$$

dal momento che non agiscono forze esterne. La condizione di Coulomb-Morin garantisce l'equilibrio finché $|\phi_t| \le \mu|\phi_n|$, ovvero finché

$$\left|\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\vartheta}\right| \le \mu\tau\,.$$

Integrando questo sistema di disequazioni disuguaglianze differenziali ricaviamo

$$-\mu\Delta\vartheta \le \ln\frac{\tau_B}{\tau_A} \le \mu\Delta\vartheta\,,$$

dove $\Delta\vartheta = \frac{3\pi}{4}$ è l'ampiezza dell'arco su cui è appoggiato il filo. Con i dati del problema si vede che la sola disuguaglianza non banale è

$$\mu \ge \frac{4}{3\pi}\ln 2\,.$$

Q3. *Si consideri il seguente sistema di vettori piani:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = 2\boldsymbol{e}_x + \alpha\boldsymbol{e}_y & \textit{applicato in } P_1 - O \equiv (1,-1), \\ \boldsymbol{v}_2 = -\boldsymbol{e}_x - 6\boldsymbol{e}_y & \textit{applicato in } P_2 - O \equiv (-1,2), \\ \boldsymbol{v}_3 = 4\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y & \textit{applicato in } P_3 - O \equiv (2,1). \end{cases}$$

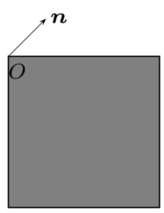
Trovare per quale valore di α l'asse centrale passa per l'origine O.

Essendo piano e con risultante non nullo, il sistema proposto è equivalente al risultante applicato in un punto qualsiasi dell'asse centrale. La richiesta che quest'ultimo passi per l'origine O equivale ad imporre l'annullamento del momento del sistema rispetto ad O. Svolgendo i calcoli si ottiene

$$\boldsymbol{M}_O = [\alpha + 4]\boldsymbol{e}_z\ :$$

occorre quindi imporre $\alpha = -4$.

Q4. *Una lamina omogenea quadrata ha massa $2m$ e lato di lunghezza 2ℓ. Sia O un suo vertice e $\boldsymbol{n}$ un versore arbitrario nel piano della lamina. Trovare il massimo valore del momento di inerzia $\boldsymbol{n}\cdot\mathbb{I}_O\boldsymbol{n}$, al variare di $\boldsymbol{n}$.*



Dal teorema di Huygens-Steiner abbiamo

$$\mathbb{I}_O = \mathbb{I}_C + 4m\ell^2(\mathbf{I} - \boldsymbol{e}_{CO}\otimes\boldsymbol{e}_{CO})\,,$$

dove $\boldsymbol{e}_{CO}$ è il versore associato alla congiungente O con il centro di massa della lamina. Passando ai momenti di inerzia abbiamo

$$\boldsymbol{n} \cdot \mathbb{I}_O \boldsymbol{n} = \boldsymbol{n} \cdot \mathbb{I}_C \boldsymbol{n} + 4m\ell^2[1 - (\boldsymbol{e}_{CO} \cdot \boldsymbol{n})^2] \,.$$

Ora, $\boldsymbol{n} \cdot \mathbb{I}_C \boldsymbol{n}$ non dipende dalla scelta di $\boldsymbol{n}$ nel piano della lamina, in quanto $\boldsymbol{n} \cdot \mathbb{I}_C \boldsymbol{n} = \frac{2}{3} m\ell^2$. Dunque $\boldsymbol{n} \cdot \mathbb{I}_O \boldsymbol{n}$ è massimo quando $\boldsymbol{e}_{CO} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ ed il valore corrispondente è

$$\boldsymbol{n} \cdot \mathbb{I}_O \boldsymbol{n} = \frac{14}{3} m\ell^2 \,.$$