Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Esame di Meccanica Razionale
Appello del 26 giugno 2003
Soluzioni: parte II

D1. *Trovare la curvatura κ della curva*

$$p(t) - O = \sqrt{2}(1 + \sin 2t)\boldsymbol{e}_x - e^{-t}\boldsymbol{e}_y + \cos t\boldsymbol{e}_z$$

nel punto corrispondente a $t = 0$.

Calcoliamo le derivate prima e seconda di $p(t)$:

$$\dot{p}(t) = 2\sqrt{2}\cos 2t\boldsymbol{e}_x + e^{-t}\boldsymbol{e}_y - \sin t\boldsymbol{e}_z \tag{1a}$$

$$\ddot{p}(t) = -4\sqrt{2}\sin 2t\boldsymbol{e}_x - e^{-t}\boldsymbol{e}_y - \cos t\boldsymbol{e}_z\,. \tag{1b}$$

La curvatura $\kappa(t)$ è data dalla formula

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{p}(t) \wedge \ddot{p}(t)|}{|\dot{p}(t)|^3}\,; \tag{2}$$

le (1) nel punto $t = 0$ assumono il valore

$$\dot{p}(0) = 2\sqrt{2}\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y \tag{3a}$$

$$\ddot{p}(0) = -\boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_z\,, \tag{3b}$$

e si ha:

$$\dot{p}(0) \wedge \ddot{p}(0) = -\boldsymbol{e}_x + 2\sqrt{2}\boldsymbol{e}_y - 2\sqrt{2}\boldsymbol{e}_z\,. \tag{4}$$

Sostituendo le (3) e la (4) in (2) otteniamo

$$\frac{\sqrt{17}}{27} \tag{5}$$

D2. *Un sistema è formato da n corpi rigidi interagenti e vincolati reciprocamente ($n > 1$). Quale delle seguenti affermazioni è corretta?*

1. *La potenza delle forze interne è sempre nulla.*
2. *La potenza delle forze interne è nulla se i vincoli sono perfetti e scleronomi.*
3. *La potenza delle forze esterne è nulla se i vincoli sono perfetti e scleronomi.*
4. *Se le forze attive sono conservative, l'energia si conserva.*
5. *Se le forze esterne sono conservative, l'energia si conserva.*
6. *La potenza delle forze esterne è sempre positiva.*

7. La potenza delle forze reattive è nulla se i vincoli sono perfetti e scleronomi.

8. La potenza delle forze attive è nulla se i vincoli sono perfetti e scleronomi.

La risposta corretta è la (7): la potenza delle forze reattive è nulla se i vincoli sono perfetti e scleronomi; infatti, se i vincoli sono perfetti, la potenza virtuale delle forze reattive è nulla; se i vincoli sono scleronomi, la potenza reale e quella virtuale coincidono. La (1) è vera solo per un singolo corpo rigido; in questo caso ($n > 1$) è, quindi, falsa. La (2) e la (3) sono false: in generale, una condizione sui vincoli non può tradursi in una condizione sulla potenza di tutte le forze esterne e/o interne in genere, che comprendono anche le forze attive; ragionamento analogo si applica alla (8). Per quanto riguarda la (4), la conservatività delle forze attive è condizione necessaria, ma non sufficiente affinchè l'energia si conservi; a maggior ragione, la (5) è falsa: la condizione deve valere per tutte le forze attive, non solo quelle esterne. Infine, anche la (6) in generale non è vera: basta pensare al caso di un corpo lanciato verso l'alto in un campo gravitazionale: la potenza delle forze esterne ìnizialmente negativa.

D3. *La struttura rigida riportata in Figura 1 è posta in un piano verticale ed è formata da tre aste: BC, verticale, di lunghezza ℓ e AC, orizzontale, di lunghezza 2ℓ, entrambe di peso trascurabile, incernierate in C, e OM, inclinata di $\frac{\pi}{6}$ sull'orizzontale, di lunghezza 2ℓ e peso $2p$; l'estremo M di quest'ultima è vincolato con un carrello al punto medio di AC. Inoltre, gli estremi O, A e B sono vincolati tramite cerniere; sull'asta AC insiste un carico verticale di densità lineare $-3\frac{p}{\ell^2}x\boldsymbol{e}_y$, dove x è l'ascissa di un punto dell'asta a partire da A. Determinare il valore assoluto M_f del momento flettente in M su AC. (i punti O e B sono allineati sull'orizzontale)*

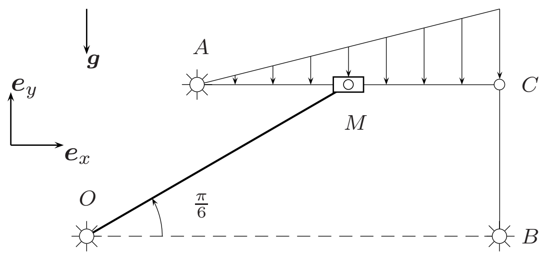

Fig. 1

Determiniamo, dapprima la reazione vincolare interna $\boldsymbol{\Phi}_M$ in M agente sull'asta OM; la natura del vincolo (carrello) impone che $\boldsymbol{\Phi}_M = \Phi_M\boldsymbol{e}_y$. Scrivendo la seconda equazione cardinale per OM scegliendo O come polo e proiettandola lungo $\boldsymbol{e}_z$, si ottiene:

$$\Phi_M 2\ell \cos\frac{\pi}{6} - 2p\ell\cos\frac{\pi}{6} = 0\,, \tag{6}$$

da cui ricaviamo immediatamente, ricordando il terzo principio della dinamica, che la forza reattiva in M agente sull'asta AC è $-\boldsymbol{\Phi}_M = -p\boldsymbol{e}_y$.

Ora, l'asta BC è priva di peso, pertanto la sua azione $\boldsymbol{\Phi}_C$ su AC deve essere diretta lungo la congiungente i punti B e C: si ha pertanto

$\boldsymbol{\Phi}_C = \Phi_C \boldsymbol{e}_y$. Usando ancora la seconda equazione cardinale, stavolta sull'asta AC, scegliendo A come polo, otteniamo

$$\Phi_C 2\ell - p\ell - \int_0^{2\ell} \frac{3p}{\ell^2} x^2 \mathrm{d}x = \Phi_C 2\ell - \frac{3p}{\ell^2}\frac{1}{3}8\ell^3 = 0 \tag{7}$$

da cui otteniamo $\Phi_C = \frac{9}{2}p\boldsymbol{e}_y$. Notiamo che la struttura del carico distribuito (ortogonale all'asta) consente anche di determinare facilmente il suo risultante $\boldsymbol{R}$ come l'area del triangolo rettangolo di base AC e altezza la densità di carico all'estremo C, ossia $\boldsymbol{R} = -\frac{1}{2}\quad 2\ell \quad \frac{3p}{\ell^2}2\ell\boldsymbol{e}_y = -6p\boldsymbol{e}_y$; la retta di applicazione di $\boldsymbol{R}$ deve trovarsi a $\frac{2}{3}$ della lunghezza dell'asta a partire da A. Calcolando il momento $\boldsymbol{M}_A^R$ di $\boldsymbol{R}$ rispetto ad A otteniamo $\boldsymbol{M}_A^R = -6p\frac{2}{3}2\ell = -8p\ell$, che è proprio il terzo termine della (7).

Conviene ora determinare la reazione vincolare $\boldsymbol{\Phi}_A$ dovuta alla cerniera a terra, che si ricava facilmente dalla prima equazione cardinale scritta per l'asta AC: abbiamo

$$\boldsymbol{\Phi}_A = \frac{5}{2}p\boldsymbol{e}_y\,. \tag{8}$$

A questo punto, se si spezza l'asta AC nel punto M e si scrive la seconda equazione cardinale per il tratto AM, interviene come nuova incognita solo il momento flettente M_f cercato: il calcolo del contributo del carico distribuito su questo tratto potrà essere condotto come descritto sopra. Si ottiene:

$$M_f\boldsymbol{e}_z - \frac{5}{2}p\frac{\ell}{2}\boldsymbol{e}_z + \frac{3}{2}p\frac{2}{3}\ell\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{0}\,; \tag{9}$$

dalla (9) ricaviamo facilmente

$$M_f = 2p\ell\,. \tag{10}$$

D4. In un piano, un disco omogeneo di massa $2m$ e raggio R può rotolare senza strisciare su una guida rettilinea orizzontale; un'asta AC di massa m e lunghezza $6R$ ha l'estremo C libero di ruotare attorno al centro del disco. Fissato un riferimento in un punto O sulla guida, qual è il momento $\boldsymbol{\Gamma}_O$ delle quantità di moto del sistema rispetto al polo O nelle coordinate lagrangiane x e ϑ indicate in Figura 2, negli istanti in cui $\vartheta = \pi$?

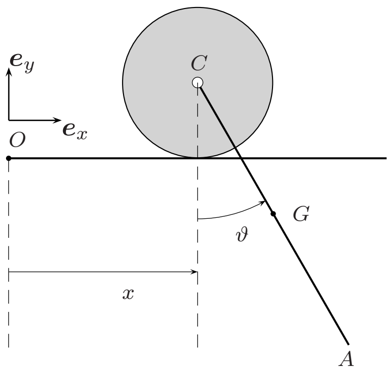

Fig. 2

Indichiamo con G il centro di massa dell'asta AC; il vettore che individua la posizione di questo punto rispetto all'origine del riferimento O è':

$$G - O = \left(x + \frac{\ell}{2}\sin\vartheta\right)\boldsymbol{e}_x + \left(R - \frac{\ell}{2}\cos\vartheta\right)\boldsymbol{e}_y\,, \tag{11}$$

da cui la velocità $\boldsymbol{v}_G$ del centro di massa dell'asta

$$\boldsymbol{v}_G := \dot{G} = \left(\dot{x} + \frac{\ell\dot{\vartheta}}{2}\cos\vartheta\right)\boldsymbol{e}_x + \frac{\ell\dot{\vartheta}}{2}\sin\vartheta\boldsymbol{e}_y\,. \tag{12}$$

Il momento della quantità di moto totale si ottiese sommando i contributi del disco e dell'asta. Per ciascuno di essi, la maniera più agevole per eseguire il calcolo è quella di ricorrere al teorema del trasporto, calcolando prima il momento della quantità di moto rispetto al baricentro di ciascun corpo. Osservando che il vincolo di puro rotolamento impone $R\boldsymbol{\omega}^{disco} = -\dot{x}\boldsymbol{e}_z$, per il disco abbiamo, :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}_O^{\text{disco}} &= \mathbb{I}_C^{disco}\boldsymbol{\omega} + (C - O)\wedge 2m\boldsymbol{v}_C \\ &= -\frac{1}{2}2mR^2\frac{\dot{x}}{R}\boldsymbol{e}_z - 2m\dot{x}R\boldsymbol{e}_z \\ &= -3mR\dot{x}\boldsymbol{e}_z\,,\end{aligned} \tag{13}$$

e per l'asta, ricordando che si chiede $\boldsymbol{K}_O$ per $\vartheta = \pi$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}_O^{\text{asta}} &= \mathbb{I}_G^{asta}\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z + (G - O)\wedge m\boldsymbol{v}_G \\ &= \frac{1}{12}m(6R)^2\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z + m\left(9R^2\dot{\vartheta} - \dot{x}3R - \dot{x}R + 3R^2\dot{\vartheta}\right)\boldsymbol{e}_z \\ &= mR(3R\dot{\vartheta} + 9R\dot{\vartheta} - 4\dot{x} + 3R\dot{\vartheta})\boldsymbol{e}_z\,.\end{aligned} \tag{14}$$

Combinando le (13) e (14) si ottiene la risposta corretta:

$$mR\left[15R\dot{\vartheta} - 7\dot{x}\right]\boldsymbol{e}_z$$