Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Esame di Meccanica Razionale
26 Settembre 2002

Il ***candidato*** scriva nelle caselle sottostanti i propri Cognome, Nome e Matricola.

COGNOME	
NOME	
MATRICOLA	

La ***prova*** consta di **4** Domande e **4** Esercizi e durerà **4** ***ore***. ***Non è permesso*** consultare testi od appunti, al di fuori di quelli distribuiti dalla Commissione.
La ***risposta*** a ciascuno di essi va scelta *esclusivamente* tra quelle già date nel testo, annerendo *un solo* circoletto ◯. Una sola è la risposta corretta. Qualora sia data più di una risposta allo stesso quesito, questa sarà considerata errata, anche se una delle rispote date è corretta.
I ***punteggi*** per ciascun quesito sono dichiarati in *trentesimi* sul testo, nel seguente formato

{E,NE,A}

dove **E** è il punteggio assegnato in caso di risposta *Esatta*, **NE** quello in caso di risposta *Non Esatta* e **A** quello in caso di risposta *Assente*. L'esito finale della prova è determinato dalla somma *algebrica* dei punteggi parziali. Spazio riservato alla Commissione. *Non scrivere nelle caselle sottostanti!*

ESITO	

DOMANDE

D1. *Un sistema dinamico ha due gradi di libertà ed è soggetto a forze attive conservative. La lagrangiana $\mathcal{L}$ del sistema è*

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - \frac{k}{2}(q_1^2 + 4q_1q_2),$$

con m e k costanti positive. Qual è la frequenza del modo normale oscillante relativo alla configurazione di equilibrio instabile $q_1 = 0$, $q_2 = 0$.

{5,-1,0}

Risposta

◯ $\omega = \sqrt{\frac{(1+\sqrt{2})k}{m}}$ ◯ $\omega = \sqrt{\frac{(1+\sqrt{17})k}{2m}}$ ◯ $\omega = \sqrt{\frac{(3+\sqrt{13})k}{2m}}$ ◯ $\omega = \sqrt{\frac{(1+\sqrt{37})k}{2m}}$

◯ $\omega = \sqrt{\frac{(1+\sqrt{10})k}{m}}$ ◯ $\omega = 2\sqrt{\frac{k}{m}}$ ◯ $\omega = \sqrt{\frac{(2+\sqrt{5})k}{m}}$ ◯ $\omega = \sqrt{\frac{(1+\sqrt{65})k}{2m}}$

D2. *Una lamina omogenea piana di massa $8m$ è composta da due semidischi di raggio $3R$ giustapposti come indicato in Figura 1. Calcolare il momento centrale di inerzia della lamina nella direzione $\mathbf{e}_z$.*

{5,-1,0}

Soluzione
○ $I_z = 5mR^2[\frac{9\pi-16}{\pi}]$ ○ $I_z = 4mR^2[\frac{9\pi-16}{\pi}]$ ○ $I_z = 16mR^2[\frac{9\pi-16}{3\pi}]$ ○ $I_z = 16mR^2[\frac{9\pi-16}{\pi}]$
○ $I_z = 12mR^2[\frac{9\pi-16}{\pi}]$ ○ $I_z = 20mR^2[\frac{9\pi-16}{3\pi}]$ ○ $I_z = 50mR^2[\frac{9\pi-16}{3\pi}]$ ○ $I_z = 8mR^2[\frac{9\pi-16}{\pi}]$

D3. *Trovare la curvatura della curva* $p(t) - O = \mathrm{e}^t \boldsymbol{e}_x + 2(t-1)^2 \boldsymbol{e}_y + \sin t \boldsymbol{e}_z$ *nel punto corrispondente a* $t = 0$.

{5,-1,0}

Risposta
○ $c = \frac{\sqrt{2}}{4}$ ○ $c = \frac{\sqrt{11}}{8}$ ○ $c = \frac{\sqrt{6}}{4}$ ○ $c = \frac{\sqrt{87}}{64}$ ○ $c = \frac{\sqrt{6}}{9}$ ○ $c = \frac{2}{9}$ ○ $c = \frac{1}{6\sqrt{2}}$ ○ $c = \frac{2\sqrt{2}}{9}$

D4. *Si consideri il seguente sistema di vettori applicati:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = 2\boldsymbol{e}_x - 4\boldsymbol{e}_y & \text{applicato in } P_1 - O \equiv (0, \alpha), \\ \boldsymbol{v}_2 = 6\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y & \text{applicato in } P_2 - O \equiv (1, 1), \\ \boldsymbol{v}_3 = -\boldsymbol{e}_x + 3\boldsymbol{e}_y & \text{applicato in } P_3 - O \equiv (2, 0). \end{cases}$$

Trovare per quale valore di α *l'asse centrale passa per il punto di coordinate* $(0, 2)$.

{5,-1,0}

Soluzione
○ $\alpha = 9$ ○ $\alpha = 7$ ○ $\alpha = 8$ ○ $\alpha = 12$ ○ $\alpha = 18$ ○ $\alpha = 22$ ○ $\alpha = 15$ ○ $\alpha = 17$

ESERCIZI

E1. *In un piano verticale, un'asta omogenea* AB *di massa* $2m$ *e lunghezza* ℓ *è libera di ruotare attorno al suo estremo fisso* A *(Figura 4). Una seconda asta omogenea* DE *di massa* $2m$ *e lunghezza* ℓ *ha il centro* C *libero di scorrere lungo* AB *ed attratto verso* A *da una molla di costante elastica* k *e lunghezza a riposo nulla. L'asta* DE *è anche libera di ruotare attorno a* C*. Determinare l'equazione di Lagrange rispetto alla variabile* $s := AC$.

{5,-1,0}

Soluzione
○ $m\ddot{s} = ms\dot{\vartheta}^2 - 2ks + mg\cos\vartheta$ ○ $2m\ddot{s} = 2ms\dot{\vartheta}^2 - 5ks + 2mg\cos\vartheta$ ○ $m\ddot{s} = ms\dot{\vartheta}^2 - 4ks + mg\cos\vartheta$
○ $5m\ddot{s} = 5ms\dot{\vartheta}^2 - ks + 5mg\cos\vartheta$ ○ $2m\ddot{s} = 2ms\dot{\vartheta}^2 - ks + 2mg\cos\vartheta$ ○ $2m\ddot{s} = 2ms\dot{\vartheta}^2 - 3ks + 2mg\cos\vartheta$
○ $3m\ddot{s} = 3ms\dot{\vartheta}^2 - ks + 3mg\cos\vartheta$ ○ $4m\ddot{s} = 4ms\dot{\vartheta}^2 - ks + 4mg\cos\vartheta$

E2. *In un piano verticale, un'asta di massa* $2m$ *e lunghezza* ℓ *ha un estremo* O *incernierato su un asse verticale* r*, e l'altro estremo* A *appoggiato ad un piano orizzontale. L'asta forma con la verticale un angolo di ampiezza* $\frac{\pi}{3}$ *(Figura 3). Una molla di costante elastica* $\frac{mg}{\ell}$ *e lunghezza a riposo nulla collega il centro dell'asta ad* r*, restando sempre orizzontale. Se il piano contenente l'asta ruota attorno ad* r *con velocità angolare costante* $\boldsymbol{\omega} = \gamma\sqrt{\frac{g}{\ell}}\boldsymbol{e}_y$*, qual è il massimo valore di* γ *compatibile con il contatto dell'asta in* A*, in assenza di attrito?*

{5,-1,0}

Risposta
○ $\frac{1}{2}\sqrt{13}$ ○ $\frac{1}{2}\sqrt{21}$ ○ $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ ○ $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$ ○ $\frac{1}{2}\sqrt{7\sqrt{3}}$ ○ $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{2}\sqrt{3}}$ ○ $\frac{1}{2}\sqrt{5\sqrt{3}}$ ○ $\frac{1}{2}\sqrt{6\sqrt{3}}$

E3. *Un disco omogeneo di massa m e raggio R è vincolato a rotolare senza strisciare lungo una guida orizzontale; nel centro B del disco è incernierato l'estremo di un'asta AB di lunghezza ℓ e massa $3m$, a sua volta incernierata in A ad una seconda asta AO di ugual lunghezza e massa m. Infine, l'estremo O è vincolato ad una cerniera fissa (Figura 2). Se i centri delle aste sono uniti da una molla di costante elastica $\gamma\frac{mg}{l}$ e lunghezza a riposo nulla, qual è il valore limite di γ tale che la configurazione in cui le aste sono verticali (con A sopra B) è di equilibrio stabile?*

{5,-1,0}

Risposta

○ $\gamma = 3$ ○ $\gamma = \frac{7}{4}$ ○ $\gamma = \frac{9}{4}$ ○ $\gamma = \frac{5}{4}$ ○ $\gamma = \frac{3}{4}$ ○ $\gamma = 2$ ○ $\gamma = \frac{5}{2}$ ○ $\gamma = \frac{3}{2}$

E4. *In un piano verticale, un filo omogeneo AB di massa trascurabile e lunghezza ℓ è appoggiato ad un profilo circolare di raggio r lungo l'arco $PR = \vartheta + \frac{\pi}{2}$; il loro reciproco contatto è caratterizzato da un coefficiente di attrito statico $\frac{1}{2}$. All'estremo A è appeso un corpo puntiforme di massa $2m$, mentre all'estremo B è applicata una forza di intensità $f = \gamma mg$ (Figura 5). Calcolare il valore massimo di γ in condizioni di equilibrio limite con $\vartheta = \frac{\pi}{3}$.*

{5,-1,0}

Soluzione

○ $4e^{\frac{\pi}{4}}$ ○ $2e^{\frac{5\pi}{12}}$ ○ $3e^{\frac{2\pi}{9}}$ ○ $4e^{\frac{3\pi}{8}}$ ○ $4e^{\frac{\pi}{6}}$ ○ $2e^{\frac{2\pi}{5}}$ ○ $3e^{\frac{\pi}{2}}$ ○ $2e^{\frac{\pi}{6}}$

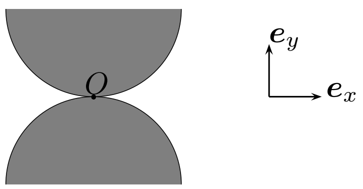

Fig. 1

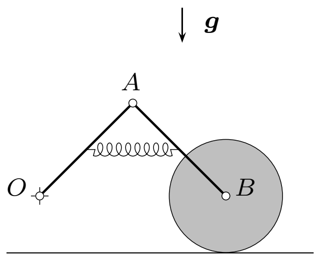

Fig.2

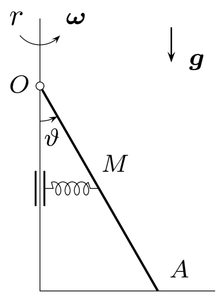

Fig.3

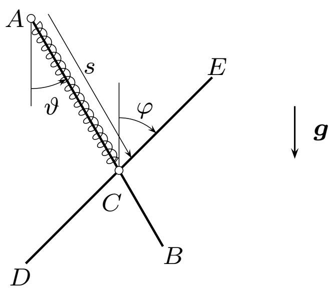

Fig.4

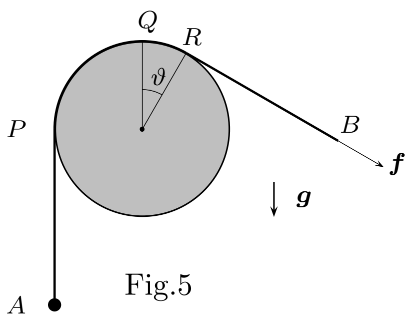

Fig.5