Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Esame di Meccanica Razionale
Appello del 26 settembre 2002
Soluzioni

D1. *Un sistema dinamico ha due gradi di libertà ed è soggetto a forze attive conservative. La lagrangiana $\mathcal{L}$ del sistema è*

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - \frac{k}{2}(q_1^2 + 4q_1q_2),$$

con m e k costanti positive. Qual è la frequenza del modo normale oscillante relativo alla configurazione di equilibrio instabile $q_1 = 0$, $q_2 = 0$.

La forma quadratica associata all'energia cinetica è

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

mentre la forma hessiana dell'energia potenziale è

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} k & 2k \\ 2k & 0 \end{pmatrix}.$$

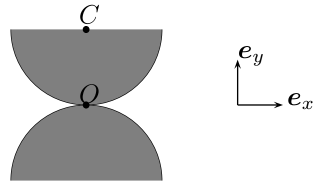
La loro diagonalizzazione simultanea conduce all'equazione $\det(\lambda\mathrm{A} - \mathrm{B}) = 0$, cioè a

$$\lambda^2 m^2 - \lambda k m - 4k^2 = 0$$

che ha unica come soluzione positiva $\lambda_+ = \frac{k}{m}\frac{1+\sqrt{17}}{2}$. La frequenza del modo oscillante è

$$\omega_+ = \sqrt{\lambda_+} = \sqrt{\frac{(1+\sqrt{17})k}{2m}}.$$

D2. *Una lamina omogenea piana di massa $8m$ è composta da due semidischi di raggio $3R$ giustapposti come indicato in Figura. Calcolare il momento centrale di inerzia della lamina nella direzione $\boldsymbol{e}_z$.*



Sia I_O^z il momento di inerzia che vogliamo trovare ed $I_O^z(\mathcal{S})$ il momento di inerzia di uno qualunque dei due semidischi che formano la lamina, rispetto all'asse passante per O e diretto lungo $\boldsymbol{e}_z$: abbiamo allora

$$I_O^z = 2 I_O^z(\mathcal{S})\,.$$

Per il teorema di Pappo-Guldino, il centro di massa G di un semidisco di raggio r si trova a distanza $\frac{4r}{3\pi}$ dalla base. Prendendo come semidisco di riferimento quello superiore, abbiamo allora $GO = 3R(1 - \frac{4}{3\pi})$ e, grazie al teorema di Huygens-Steiner abbiamo che

$$I_O^z(\mathcal{S}) = I_G^z(\mathcal{S}) + 36mR^2\left[\left(1 - \frac{4}{3\pi}\right)^2\right],$$

dove abbiamo osservato che la massa del semidisco è $4m$. Se C è il centro del semidisco, una ulteriore applicazione del teorema di Huygens-Steiner permette di concludere che

$$I_C^z(\mathcal{S}) = I_G^z(\mathcal{S}) + 36mR^2\left(1 - \frac{4}{3\pi}\right)^2$$

e, sottraendo le ultime due equazioni otteniamo

$$I_O^z(\mathcal{S}) = I_C^z(\mathcal{S}) + 36mR^2\left[1 - \frac{8}{3\pi}\right].$$

Per il calcolo di $I_C^z(\mathcal{S})$ è sufficiente osservare che il semidisco è metà di un disco $\mathcal{D}$ di massa $8m$ e raggio $3R$ per cui

$$I_C^z(\mathcal{S}) = \frac{1}{2} I_C^z(\mathcal{D}) = 18mR^2$$

e dunque

$$I_O^z(\mathcal{S}) = 18mR^2\left[3 - \frac{16}{3\pi}\right] = 6mR^2\left[\frac{9\pi - 16}{\pi}\right],$$

ossia

$$I_O^z = 2I_O^z(\mathcal{S}) = 12mR^2\left[\frac{9\pi - 16}{\pi}\right].$$

D3. *Trovare la curvatura della curva* $p(t) - O = \mathrm{e}^t\boldsymbol{e}_x + 2(t-1)^2\boldsymbol{e}_y + \sin t\,\boldsymbol{e}_z$ *nel punto corrispondente a* $t = 0$.

Poiché

$$p'(t) = \mathrm{e}^t\boldsymbol{e}_x + 4(t-1)\boldsymbol{e}_y + \cos t\,\boldsymbol{e}_z$$

e

$$p''(t) = \mathrm{e}^t\boldsymbol{e}_x + 4\boldsymbol{e}_y - \sin t\,\boldsymbol{e}_z$$

quando $t = 0$ abbiamo

$$p'(0) = \boldsymbol{e}_x - 4\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z \quad \text{and} \quad p''(0) = \boldsymbol{e}_x + 4\boldsymbol{e}_y$$

e dunque

$$c = \frac{p'(0) \wedge p''(0)}{|p'(0)|^3} = \frac{1}{6\sqrt{2}}\,.$$

D4. *Si consideri il seguente sistema di vettori applicati:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = 2\boldsymbol{e}_x - 4\boldsymbol{e}_y & \textit{applicato in } P_1 - O \equiv (0, \alpha), \\ \boldsymbol{v}_2 = 6\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y & \textit{applicato in } P_2 - O \equiv (1, 1), \\ \boldsymbol{v}_3 = -\boldsymbol{e}_x + 3\boldsymbol{e}_y & \textit{applicato in } P_3 - O \equiv (2, 0). \end{cases}$$

Trovare per quale valore di α l'asse centrale passa per il punto di coordinate $(0, 2)$.

Il risultante è $\boldsymbol{R} = 7\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y$ ed il momento risultante rispetto ad O è $\boldsymbol{M}_O = 2(1-\alpha)\boldsymbol{e}_z$. L'asse centrale passa per il punto P tale che

$$P - O = \frac{\boldsymbol{R} \wedge \boldsymbol{M}_O}{R^2} = \frac{1-\alpha}{25}(\boldsymbol{e}_x - 7\boldsymbol{e}_y)\,,$$

che ha dunque coordinate cartesiane $(\frac{1-\alpha}{25}, -\frac{7(1-\alpha)}{25})$. Poiché l'asse centrale ha la direzione di $\boldsymbol{R}$, il suo coefficiente angolare è pari a $\frac{1}{7}$ e dunque la sua equazione è

$$y + \frac{7(1-\alpha)}{25}) = \frac{1}{7}(x - \frac{1-\alpha}{25})\,.$$

Imponendo il passaggio per il punto $(0, 2)$ ricaviamo, dopo alcune semplificazioni,

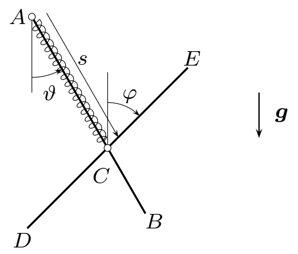
$$1 = \frac{\alpha - 1}{7}$$

da cui segue che $\alpha = 8$.

E1. *In un piano verticale, un'asta omogenea AB di massa $2m$ e lunghezza ℓ è libera di ruotare attorno al suo estremo fisso A. Una seconda asta omogenea DE di massa $2m$ e lunghezza ℓ ha il centro C libero di scorrere lungo AB ed attratto verso A da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. L'asta DE è anche libera di ruotare attorno a C. Determinare l'equazione di Lagrange rispetto alla variabile $s := AC$.*

L'asta AB esegue una rotazione attorno all'asse fisso passante per A e diretto lungo $\boldsymbol{e}_z$, con velocità angolare $\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z$. Pertanto, la sua energia cinetica è

$$T_{AB} = \frac{m}{3}\ell^2\dot{\vartheta}^2\,.$$



Quanto all'asta DE, le coordinate del suo centro di massa C sono $(s\sin\vartheta, -s\cos\vartheta)$. Poiché la sua velocità angolare è $\dot\varphi \boldsymbol{e}_z$, l'energia cinetica è

$$T_{DE} = \frac{m}{12}\ell^2\dot\varphi^2 + mv_C^2.$$

Se deriviamo rispetto al tempo il vettore posizione $C - A$ ricaviamo

$$\boldsymbol{v}_C = (\dot s\sin\vartheta + s\dot\vartheta\cos\vartheta)\boldsymbol{e}_x + (-\dot s\sin\vartheta + s\dot\vartheta\sin\vartheta)\boldsymbol{e}_y$$

da cui segue

$$T_{DE} = \frac{m}{12}\ell^2\dot\varphi^2 + m(\dot s^2 + s^2\dot\vartheta^2)\,.$$

L'energia potenziale V comprende i contributi della forza peso agente su entrambe le aste e quello della forza elastica dovuta alla molla

$$V = \frac{k}{2}s^2 - mg\ell\cos\vartheta - 2mgs\cos\vartheta\,.$$

Possiamo ora scrivere la lagrangiana $\mathcal{L} := T - V$ del sistema:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{3}\ell^2\dot\vartheta^2 + \frac{m}{12}\ell^2\dot\varphi^2 + m(\dot s^2 + s^2\dot\vartheta^2) - \frac{k}{2}s^2 + mg(\ell + 2s)\cos\vartheta$$

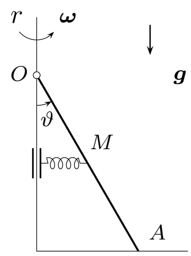
da cui segue l'equazione di Lagrange per s,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot s} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot s}$$

cioè

$$2m\ddot s = 2ms\dot\vartheta^2 - ks + 2mg\cos\vartheta\,.$$

E2. *In un piano verticale, un'asta di massa $2m$ e lunghezza ℓ ha un estremo O incernierato su un asse verticale r, e l'altro estremo A appoggiato ad un piano orizzontale. L'asta forma con la verticale un angolo ϑ di ampiezza $\frac{\pi}{3}$. Una molla di costante elastica $\frac{mg}{\ell}$ e lunghezza a riposo nulla collega il centro dell'asta ad r, restando sempre orizzontale. Se il piano contenente l'asta ruota attorno ad r con velocità angolare costante $\boldsymbol{\omega} = \gamma\sqrt{\frac{g}{\ell}}\boldsymbol{e}_y$, qual è il massimo valore di γ compatibile con il contatto dell'asta in A, in assenza di attrito?*



Sia $\mathbf{\Phi}_A = \Phi_A \boldsymbol{e}_y$ la reazione vincolare dovuta all'appoggio in A: il contatto tra asta e guida è garantito finché $\Phi_A \geq 0$. Richiediamo l'equilibrio dei momenti rispetto al polo O e poniamoci nel sistema rotante. Oltre alla forza peso ed alla forza elastica, bisogna considerare la forza centrifuga agente sull'asta. Essa ha risultante $\boldsymbol{R}_c = 2m\gamma^2 \frac{g}{\ell} d_C$, dove d_C è la distanza del centro di massa C dell'asta dall'asse di rotazione, ma *non* è applicata in C, bensì nel punto dell'asta distante $\frac{2}{3}\ell$ dal punto O. In questo modo, l'equilibrio dei momenti rispetto ad O richiede

$$\Phi_A \ell \sin\vartheta - \frac{k\ell^2}{4} \sin\vartheta\cos\vartheta + \frac{2\gamma^2 g\ell}{3} \sin\vartheta\cos\vartheta - mg\ell\sin\vartheta = 0$$

da cui si ottiene

$$\Phi_A = mg + \frac{k\ell}{4}\cos\vartheta - \frac{2\gamma^2}{3} mg\cos\vartheta\,.$$

Il contatto tra l'asta e la guida sussiste finché $\Phi_A \geq 0$ ovvero per

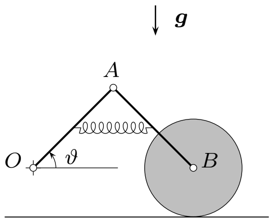
$$\gamma^2 \leq \frac{3}{4mg\cos\vartheta}\left(\frac{k\ell}{2}\cos\vartheta + mg\right)\,.$$

Inseriti i valori $k = \frac{mg}{\ell}$ e $\vartheta = \frac{\pi}{3}$ otteniamo la condizione di contatto

$$\gamma \leq \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\,.$$

E3. *Un disco omogeneo di massa m e raggio R è vincolato a rotolare senza strisciare lungo una guida orizzontale; nel centro B del disco è incernierato l'estremo di un'asta AB di lunghezza ℓ e massa $3m$, a sua volta incernierata in A ad una seconda asta AO di ugual lunghezza e massa m. Infine, l'estremo O è vincolato ad una cerniera fissa (Figura 2). Se i centri delle aste sono uniti da una molla di costante elastica $\gamma\frac{mg}{l}$ e lunghezza a riposo nulla, qual è il valore limite di γ tale che la configurazione in cui le aste sono verticali (con A sopra B)è di equilibrio stabile?*

Le sole sollecitazioni attive presenti sono la forza peso e quella elastica, entrambe conservative. Per trovare le posizioni di equilibrio in funzione dell'angolo ϑ



indicato in figura scriviamo l'energia potenziale

$$V = \gamma \frac{mg\ell}{2} \cos^2\vartheta + 2mg\ell \sin\vartheta$$

e annulliamone la derivata prima

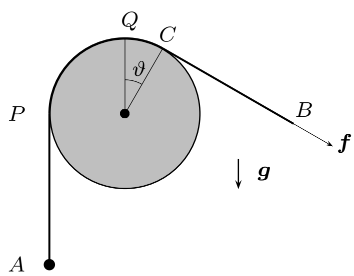
$$\gamma mg\ell \cos\vartheta[-\sin\vartheta + \frac{2}{\gamma}] = 0\,.$$

Come si vede, la soluzione $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ è sempre ammissibile e per studiarne la stabilità valutiamo la derivata seconda di $V(\vartheta)$ in $\vartheta = \frac{\pi}{2}$:

$$V''(\frac{\pi}{2}) = (\gamma - 2)\, mg\ell.$$

Pertanto la configurazione $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ è stabile quando $\gamma \geq 2$.

E4. *In un piano verticale, un filo omogeneo AB di massa trascurabile e lunghezza ℓ è appoggiato ad un profilo circolare di raggio r lungo l'arco $PR = \vartheta + \frac{\pi}{2}$; il loro reciproco contatto è caratterizzato da un coefficiente di attrito statico $\frac{1}{2}$. All'estremo A è appeso un corpo puntiforme di massa $2m$, mentre all'estremo B è applicata una forza di intensità $f = \gamma mg$. Calcolare il valore massimo di γ in condizioni di equilibrio limite con $\vartheta = \frac{\pi}{3}$.*



Tagliando il filo in P e Q, dall'equilibrio di AP segue che la tensione in P è $\tau_P = 2mg$, mentre dall'equilibrio di BC ricaviamo la tensione in C, $\tau_C = \gamma mg$.

Sul tratto PC valgono le equazioni di equilibrio indefinite

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\tau}{R\mathrm{d}\vartheta} + \Phi_t = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\tau}{R} + \Phi_n = 0\,,$$

dove Φ_t e Φ_n sono le componenti della reazione vincolare specifica lungo il filo. La relazione di Coulomb e Morin impone

$$|\Phi_t| \leq \mu|\Phi_n|$$

o, grazie alle equazioni di equilibrio indefinite,

$$|\frac{\mathrm{d}\tau}{R\mathrm{d}\vartheta}| \leq \mu\frac{\tau}{R}$$

da cui si ottiene

$$e^{-[\mu(\vartheta+\frac{\pi}{2})]} \leq \frac{\tau_P}{\tau_C} \leq e^{\mu(\vartheta+\frac{\pi}{2})}$$

ed il massimo valore di γ compatibile con l'equilibrio è

$$\gamma = 2e^{\mu(\vartheta+\frac{\pi}{2})}$$

o, sostituendo i valori di μ e ϑ, $\gamma = 2e^{\frac{5\pi}{12}}$.