

*Università di Pavia*  
*Facoltà di Ingegneria*  
Esame di Meccanica Razionale  
Appello del 27 febbraio 2003  
**Soluzioni (Parte I)**

**Q1.** *Trovare la torsione della curva*

$$p(u) - O = 2(\cos u e_x + \sin u e_y) + e^{\sqrt{2}u} e_z$$

nel punto corrispondente ad  $u = 0$ .

La torsione  $\tau$  si calcola tramite la formula

$$\tau = -\frac{p' \wedge p'' \cdot p'''}{|p' \wedge p''|^2}$$

dove gli apici indicano derivazioni rispetto al parametro  $u$ . Dal testo segue che

$$p'(0) = 2e_y + \sqrt{2}e_z \quad p''(0) = 2(-e_x + e_z) \quad p'''(0) = 2(-e_y + \sqrt{2}e_z)$$

da cui otteniamo anche  $p' \wedge p''(0) = 2(2e_x - \sqrt{2}e_y + 2e_z)$  e, infine

$$\tau = -\frac{3\sqrt{2}}{10}.$$

**Q2.** *L'energia potenziale  $V$  di un sistema scleronomo a due gradi di libertà nelle coordinate lagrangiane  $q_1$  e  $q_2$  è:*

$$V(q_1, q_2) = q_1 q_2^2 + 2q_2^3 + 3q_1^2 q_2$$

*Quale delle seguenti affermazioni è corretta?*

La configurazione  $(q_1, q_2) = (0, 0)$  è instabile in base al primo teorema di instabilità di LIAPUNOV.

Il sistema non ha configurazioni di equilibrio.

La configurazione  $(q_1, q_2) = (0, 0)$  è stabile in base al teorema di stabilità di DIRICHLET-LAGRANGE.

Il sistema ha infinite configurazioni di equilibrio stabili.

La configurazione  $(q_1, q_2) = (0, 0)$  è instabile in base al teorema di instabilità di CHETAEV.

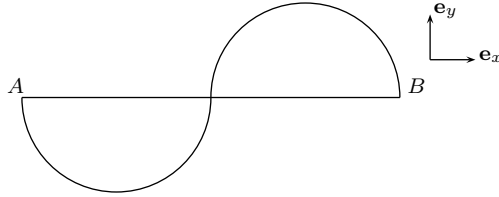
La configurazione  $(q_1, q_2) = (0, 0)$  è instabile in base al teorema di stabilità di DIRICHLET-LAGRANGE.

La configurazione  $(q_1, q_2) = (0, 0)$  è stabile in base al teorema di instabilità di HAGEDORN-TALIAFERRO.

○ La configurazione  $(q_1, q_2) = (0, 0)$  è stabile in base al secondo teorema di instabilità di LIAPUNOV.

La funzione  $V$  ha un punto stazionario in  $(0, 0)$ , visto che  $\nabla V(0, 0) = 0$ . Poiché per tutte le coppie  $(q_1, q_2)$  tali che  $q_1 > 0$  e  $q_2 > 0$  è  $V(q_1, q_2) > 0$ , mentre per le coppie tali che  $q_1 < 0$  e  $q_2 < 0$  è  $V(q_1, q_2) < 0$ , il punto  $(0, 0)$  non corrisponde né ad un massimo né ad un minimo per  $V$  e dunque deve essere un punto di sella. Gli unici teoremi di instabilità che hanno validità nei punti di sella sono il primo teorema di LIAPUNOV ed il teorema di CHETAEV. Per applicare il primo teorema di LIAPUNOV è però necessario che la forma hessiana di  $V$  non abbia autovalori nulli, ipotesi violata in questo caso dove tutte le derivate seconde si annullano in  $(0, 0)$ . Il teorema di CHETAEV richiede che  $V$  sia funzione omogenea nelle coordinate generalizzate, ipotesi verificata in quanto la funzione  $V$  del testo è omogenea di grado tre. Dunque, concludiamo che la configurazione di equilibrio  $(0, 0)$  è instabile, in virtù del teorema di CHETAEV.

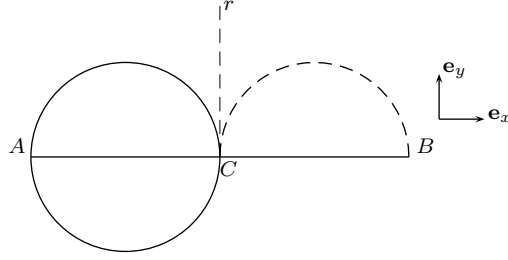
**Q3.** Un corpo rigido  $\mathcal{B}$  è composto da un'asta omogenea  $AB$  di massa  $\frac{m}{2}$  e lunghezza  $2\ell$  e da due semicirconferenze di ugual raggio  $\frac{\ell}{2}$  ed ugual massa  $2m$ , disposte come in Figura 1. Trovare il momento centrale di inerzia di  $\mathcal{B}$  nella direzione  $\mathbf{e}_y$ . Un corpo rigido  $\mathcal{B}$  è composto da un'asta omogenea  $AB$  di massa  $\frac{m}{2}$  e lunghezza  $2\ell$  e da due semicirconferenze di ugual raggio  $\frac{\ell}{2}$  ed ugual massa  $2m$ , disposte come in Figura 1. Trovare il momento centrale di inerzia di  $\mathcal{B}$  nella direzione  $\mathbf{e}_y$ .



Per le proprietà di simmetria materiale del sistema, il punto medio  $C$  di  $AB$  è anche il centro di massa dell'intero sistema. Consideriamo ora un sistema materiale modificato, in cui una delle due circonferenze viene riflessa rispetto all'asse  $r$ , passante per  $C$  e parallelo ad  $\mathbf{e}_y$ , indicato nella figura che segue.

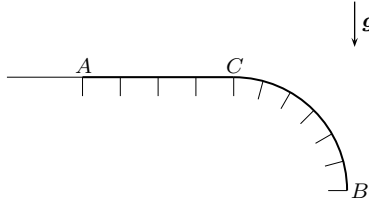
Poiché questa trasformazione non cambia le distanze dei punti materiali da  $r$ , il momento di inerzia rispetto ad  $r$  rimane inalterato. È comodo calcolarlo nella configurazione modificata, in quanto si ottiene come somma del momento centrale di  $AB$  e del momento di inerzia di una circonferenza rispetto al suo punto  $C$ . Grazie al teorema di HUYGENS-STEINER abbiamo

$$\mathbf{e}_y \cdot \mathbb{I} \mathbf{e}_y = \frac{m\ell^2}{6} + \frac{3m\ell^2}{2} = \frac{5m\ell^2}{3}.$$



Il primo addendo è il contributo dell'asta di massa  $\frac{m}{2}$  e lunghezza  $2\ell$ , il secondo si riferisce alla circonferenza che ha massa  $4m$  e raggio  $\frac{\ell}{2}$ .

**Q4.** In un piano verticale, un filo omogeneo  $AB$  di peso specifico costante  $p$  è disposto su un supporto formato da un quadrante  $BC$  di raggio  $\frac{R}{3}$  che non offre attrito e da una semiretta il cui coefficiente di attrito statico è  $\frac{1}{2}$ . Qual è il minimo valore di  $x = AC$  affinché sia possibile l'equilibrio?



Imponiamo l'equilibrio del tratto  $BC$  del filo, dove non agisce l'attrito e la sola forza attiva distribuita presente è la forza peso. Detto  $\vartheta$  l'angolo formato con l'orizzontale dal raggio corrispondente al punto generico del filo abbiamo

$$\tau(\vartheta) = \frac{pR}{3} \sin \vartheta + k.$$

Per determinare la costante di integrazione  $k$ , osserviamo che l'estremo  $B$  è libero e dunque  $\tau(0) = 0$ ; pertanto deve essere  $k = 0$  e  $\tau(\vartheta) = \frac{pR}{3} \sin \vartheta$ . Nel punto  $C$ , dove  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ , la tensione è  $\tau_C = \frac{pR}{3}$ . Ottenuta questa informazione, isoliamo il tratto  $AC$  del filo, sul quale è presente, oltre al peso, la forza di attrito. L'equilibrio di  $AC$  è garantito quando è rispettata la disuguaglianza di COULOMB-MORIN

$$|\Phi_t| \leq \mu |\Phi_n|,$$

dove  $\mu$  è il coefficiente di attrito statico tra filo e supporto,  $\Phi_t$  e  $\Phi_n$  sono le componenti della reazione vincolare specifica nella direzione parallela ed ortogonale al filo, rispettivamente. Dalle equazioni di equilibrio indefinite dei fili, osservando che il peso specifico ha componenti  $f_n = p$  e  $f_t = 0$  e che la curvatura di

$AC$  è nulla, ricaviamo

$$|\Phi_t| = \left| \frac{d\tau}{dx} \right| \quad |\Phi_n| = p$$

che, inseriti nella disuguaglianza di COULOMB-MORIN forniscono le disequazioni

$$-\frac{1}{2}p \leq \frac{d\tau}{dx} \leq \frac{1}{2}p.$$

Integrando lungo  $AC$  ed osservando che  $\tau_A = 0$ , visto che l'estremo  $A$  è libero, abbiamo la sola disequazione significativa

$$\tau_C - \tau_A = \frac{pR}{3} \leq \frac{1}{2}px$$

da cui ricaviamo la condizione di equilibrio  $x \geq \frac{2R}{3}$ . Il valore minimo di  $x$  richiesto è dunque

$$x = \frac{2R}{3}$$