Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Esame di Meccanica Razionale
Appello del 27 febbraio 2003
Soluzioni (Parte II)

Q1. *Dati i tensori* $\mathbf{A} = \boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y \otimes \boldsymbol{e}_z$ e $\mathbf{B} = \boldsymbol{e}_z \otimes \boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_y$, *trovare l'espressione di* $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$.

Ricordiamo anzitutto la regola di contrazione delle diadi:

$$(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b})(\boldsymbol{c} \otimes \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{d}\,;$$

calcoliamo quindi

$$\mathbf{AB} = -\boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_y + 2\boldsymbol{e}_y \otimes \boldsymbol{e}_x$$

e

$$\mathbf{BA} = \boldsymbol{e}_z \otimes \boldsymbol{e}_y - 2\boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_z\,,$$

sfruttando le proprietà di ortonormalità dei versori $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ ed $\boldsymbol{e}_z$. Si ottiene quindi facilmente la risposta corretta:

$$\mathbf{AB} - \mathbf{BA} = -\boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_y + 2\boldsymbol{e}_y \otimes \boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_z \otimes \boldsymbol{e}_y + 2\boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_z\,.$$

(Nota: per una discussione più dettagliata di questo tipo di esercizi, si veda la soluzione del tema d'esame del 18 luglio 2002.

Q2. *Si consideri il seguente sistema di vettori applicati:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = 5\boldsymbol{e}_x - 2\boldsymbol{e}_y & \textit{applicato in } P_1 - O \equiv (1, -1), \\ \boldsymbol{v}_2 = -\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y & \textit{applicato in } P_2 - O \equiv (0, 2), \\ \boldsymbol{v}_3 = 2\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y & \textit{applicato in } P_3 - O \equiv (2, 1). \end{cases}$$

Trovare l'ascissa δ *dell'intersezione fra l'asse centrale e l'asse* x.

Si tratta di un esercizio standard, in cui occorre unicamente applicare correttamente le formule per determinare il valore richiesto. Il risultante del sistema è $\boldsymbol{R} = 6\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y$; calcoliamo il momento totale $\boldsymbol{M}_O$ del sistema, scegliendo come polo l'origine del riferimento:

$$\boldsymbol{M}_O = (\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y) \wedge (5\boldsymbol{e}_x - 2\boldsymbol{e}_y) + 2\boldsymbol{e}_y \wedge (-\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y) + (2\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y) \wedge 2\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y) = \boldsymbol{e}_z\,;$$

inoltre, occorre il prodotto

$$\boldsymbol{R} \wedge \boldsymbol{M}_O = -(\boldsymbol{e}_x + 6\boldsymbol{e}_y)\,.$$

L'equazione dell'asse centrale è

$$C - O = \frac{\boldsymbol{R} \wedge \boldsymbol{M}_O}{R^2} + \lambda \boldsymbol{R},$$

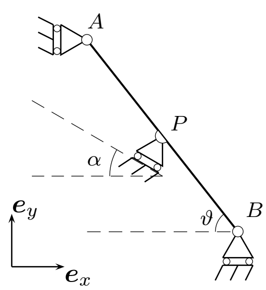
pertanto, in forma parametrica, la retta dell'asse centrale risulta essere

$$\begin{cases} x = - \dfrac{1}{37} + 6\lambda \\ y = - \dfrac{6}{37} - \lambda \end{cases}$$

Per determinare l'ascissa dell'intersezione fra l'asse centrale e la retta delle ascisse, basta imporre che $y = 0$, e ricavare il valore corrispondente di λ da sostituire per ricavare δ. Il risultato così ottenuto è:

$$\delta = -1\,.$$

Q3. *Un'asta rigida di lunghezza $2\sqrt{2}\ell$ è vincolata da tre carrelli disposti come mostrato in Figura 1, in modo da essere inclinata di un angolo $\vartheta = \frac{\pi}{6}$ rispetto alla direzione $\boldsymbol{e}_x$. Mantenendo fisso l'angolo $\alpha = \frac{\pi}{3}$ che la retta di scorrimento del carrello P forma con $\boldsymbol{e}_x$, determinare la distanza $d = \overline{PB}$ alla quale deve essere posto questo carrello affinché la struttura sia labile.*



Ciascuno dei tre carrelli esercita sull'asta una reazione vincolare di cui è nota la direzione, perpendicolare alla retta di scorrimento del carrello stesso. Possiamo scrivere le tre reazioni vincolari come $\boldsymbol{\Phi}_A = \Phi \boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{\Psi}_B = \Psi \boldsymbol{e}_y$ e $\boldsymbol{\Gamma}_P = \Gamma(\sin\alpha \boldsymbol{e}_x + \cos\alpha \boldsymbol{e}_y)$, esplicitando le incognite vincolari Φ, Ψ e Γ.
In condizioni di labilità, non è possibile determinare tali reazioni vincolari in presenza di un carico qualunque. Tale sistema può essere ottenuto considerando il sistema scarico e proiettando la prima equazione cardinale della statica lungo $\boldsymbol{e}_x$ ed $\boldsymbol{e}_y$, e la seconda equazione cardinale lungo $\boldsymbol{e}_z$; scegliendo P come polo per calcolare i momenti, il sistema risulta essere :

$$\begin{cases} \Phi + \Gamma \sin\alpha & = 0 \\ \Psi + \Gamma \cos\alpha & = 0 \\ \Psi d \cos\vartheta - \Phi\ (2\sqrt{2}\ell - d) \sin\vartheta & = 0 \end{cases}$$

Imponendo che il determinante della matrice caratteristica del sistema sia nullo ottenaimo un'equazione per d che, risolta fornice il valore cercato:

$$d = 2\sqrt{2}\ell \frac{\sin\alpha \sin\vartheta}{\cos(\alpha - \vartheta)}$$

ossia, ricordando i valori di α e ϑ

$$d = \sqrt{2}\ell$$

Q4. *In un piano verticale, un'asta AB di massa $2m$ e lunghezza ℓ ha l'estremo A libero di muoversi senza attrito lungo una guida orizzontale; una molla di costante elastica $\frac{3mg}{\ell}$ e lunghezza a riposo nulla attrae A verso un punto O fisso sulla guida. L'asta, inoltre, può ruotare attorno ad A. (Figura 2). Calcolare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno alla configurazione di equilibrio stabile.*

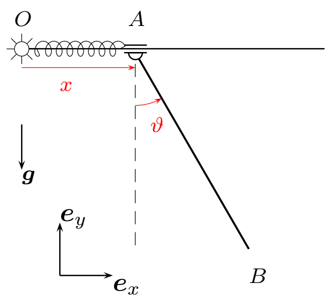


Fig.2

Il sistema possiede due gradi di libertà, che possiamo associare alle coordinate lagrangiane x (ascissa di A lungo la guida, con origine in O) e ϑ (angolo che $B - A$ forma con $-\boldsymbol{e}_y$) (si veda la figura). Detto G il baricentro dell'asta, posto nel punto medio di AB, la sua posizione viene individuata dal vettore

$$G - O = (x + \frac{\ell}{2}\sin\vartheta)\boldsymbol{e}_x - \frac{\ell}{2}\cos\vartheta \boldsymbol{e}_y\,,$$

e pertanto la sua velocità è

$$\dot{G} = (\dot{x} + \frac{\ell\dot{\vartheta}}{2}\cos\vartheta)\boldsymbol{e}_x + \frac{\ell\dot{\vartheta}}{2}\sin\vartheta \boldsymbol{e}_y\,.$$

Questo permette di scrivere l'energia cinetica T dell'asta utilizzando il teorema di König:

$$T = \frac{1}{2}2m\dot{G}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}2m\ell^2\dot{\vartheta}^2 = m(\dot{x}^2 + \frac{\ell^2\dot{\vartheta}^2}{3} + \ell\dot{x}\dot{\vartheta}\cos\vartheta)\,.$$

L'energia potenziale V ha un contributo dovuto alla forza della molla e uno dovuto alla forza peso; indicando la costante elastica della molla con $k := \frac{3mg}{\ell}$, si ha:

$$V = \frac{1}{2}kx^2 - 2mg\frac{\ell}{2}\cos\vartheta = \frac{3mg}{2\ell}x^2 - mg\ell\cos\vartheta\,.$$

Si vede facilmente che l'unica configurazione di equilibrio stabile corrisponde a $x = 0$ e $\vartheta = 0$; per determinare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno a tale posizione di equilibrio, occorre sviluppare al secondo ordine T e V attorno ai valori di equilibrio.
Dette A_0 e B_0 le matrici definite, rispettivamente da

$$(A_0)_{i,j} = \frac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}_i\partial\dot{q}_j}(0,0) \qquad \text{e} \qquad (B_0)_{i,j} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_i\partial q_j}(0,0)\,,$$

dove $i, j = 1, 2$ e $q_1 = x$, $q_2 = \vartheta$; nel nostro caso, queste matrici risultano essere

$$A_0 = \begin{pmatrix} 2m & m\ell \\ m\ell & \frac{2}{3}m\ell^2 \end{pmatrix}$$

e

$$B_0 = \begin{pmatrix} \frac{3mg}{\ell} & 0 \\ 0 & mg\ell \end{pmatrix}$$

A questo punto, occorre diagonalizzare simultaneamente le due matrici; imponendo che $\det(B_0 - \lambda A_0) = 0$, sarà possibile trovare due valori di λ cercati, le cui radici forniscono le frequenze cercate.
A conti fatti, il risultato corretto è:

$$\sqrt{\lambda} = \sqrt{6 \pm 3\sqrt{3}}\sqrt{\frac{g}{\ell}}$$