Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Esame di Meccanica Razionale
Appello del 27 giugno 2002
Soluzioni

D1. *Si consideri il seguente sistema di vettori applicati piani:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = 2\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y & \text{applicato in } P_1 - O \equiv (1,1), \\ \boldsymbol{v}_2 = -2\boldsymbol{e}_x & \text{applicato in } P_2 - O \equiv (-1,1), \\ \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{e}_x - \beta\boldsymbol{e}_y & \text{applicato in } P_3 - O \equiv (1,-1). \end{cases}$$

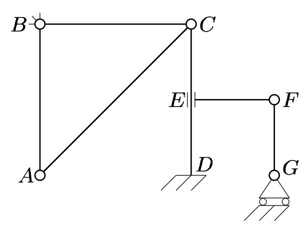
Trovare per quale valore di β l'asse centrale del sistema passa per l'origine.

Il risultante di questo sistema di vettori piani è certamente non nullo. Pertanto è possibile ridurlo ad un unico vettore, coincidente con il risultante, applicato in un punto dell'asse centrale. Poiché per i sistemi piani i punti dell'asse centrale sono tali che il momento del sistema calcolato rispetto ad essi è nullo, l'origine appeartiene all'asse entrale quando

$$\mathbf{M}_O = -\beta\boldsymbol{e}_z = \mathbf{0}$$

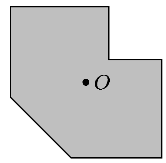
cioè per $\beta = 0$.

D2. *Si consideri la struttura articolata rappresentata in Figura, vincolata a terra da una cerniera in B, da un incastro completo in D e da un carrello bilatero in G. Quante incognite scalari occorre determinare per trovare tutte le reazioni vincolari, interne ed esterne?*



Se in una cerniera concorrono k aste, il numero di incognite è $2(k-1)$ per cerniere *interne*, $2k$ per cerniere *esterne*. Così A ed F dànno due incognite ciascuna, mentre B e C ne apportano quattro ciascuna. L'incastro D e l'appoggio G forniscono rispettivamente tre ed una incognita, visto che un'unica asta concorre in essi mentre il manicotto E dà altre due incognite: una forza ed una coppia. Complessivamente, dobbiamo determinare 18 incognite.

D3. *Da una lamina quadrata di massa m e lato di lunghezza ℓ vengono tolti un quadrato di lato $\ell/2$ ed un triangolo rettangolo isoscele il cui cateto è lungo $\ell/4$,*



disposti come in Figura. Determinare l'ascissa del centro di massa della figura così ottenuta, rispetto al centro O del quadrato.

L'ascissa x_Q del centro di massa del quadrato rispetto ad O è $x_Q = \frac{\ell}{4}$, mentre quella x_T del triangolo è $x_T = -\frac{5}{12}\ell$. Usando il principio della lacuna, abbiamo

$$x_G = \frac{-m_Q x_Q - m_T x_T}{m - m_Q - m_T}$$

dove la massa del quadrato è $m_Q = \frac{m}{4}$ e quella del triangolo è $m_T = \frac{m}{32}$. Svolgendo i calcoli otteniamo $x_G = \frac{19\ell}{276}$.

D4. *Trovare la normale principale della curva piana, grafico della funzione $f(x) = 2\cos x$, nel punto di ascissa $x = \frac{\pi}{4}$.*

Abbiamo

$$P - O = x\boldsymbol{e}_x + 2\cos x\boldsymbol{e}_y$$

e dunque

$$P'(x) = \boldsymbol{e}_x - 2\sin x\boldsymbol{e}_y \quad P''(x) = -2\cos x\boldsymbol{e}_y.$$

Dalla prima formula di Frénet-Serret segue

$$c\boldsymbol{n} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{|P'|^2}[P'' - \frac{P' \cdot P''}{|P'|^2}P']$$

che, posto $x = \frac{\pi}{4}$ e normalizzando, fornisce

$$\boldsymbol{n} = -\frac{1}{\sqrt{6}}[2\boldsymbol{e}_x + \sqrt{2}\boldsymbol{e}_y].$$

E1. *Un sistema dinamico ha due gradi di libertà ed è soggetto a forze attive conservative. La lagrangiana $\mathcal{L}$ del sistema è*

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_2^2\right) - \frac{k}{2}q_1 q_2,$$

con m e k costanti positive. Caratterizzare il modo normale iperbolico relativo alla configurazione di equilibrio $q_1 = 0$, $q_2 = 0$

La forma quadratica A associata all'energia cinetica è

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{pmatrix}$$

mentre la forma hessiana dell'energia potenziale è

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{k}{2} \\ \frac{k}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori di B rispetto ad A sono

$$\lambda_{\pm} = \pm \frac{k}{2\sqrt{2}m}$$

ed il modo normale corrispondente all'autovalore negativo λ_- risolve l'equazione

$$[\lambda_- \mathrm{A} - \mathrm{B}]\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$$

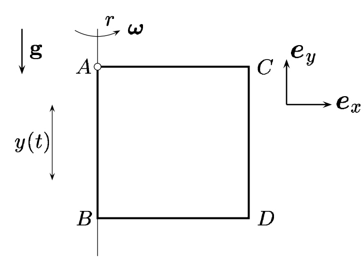
in cui

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

rappresenta lo scostamento dalla posizione di equilibrio. Svolgendo i calcoli si vede che il modo normale instabile soddisfa la relazione

$$u_1 = -u_2\sqrt{2}.$$

E2. *In un piano verticale, una lamina quadrata omogenea di massa m e lato ℓ ha il lato AB appoggiato su una guida verticale r. In A vi è una cerniera mobile e la lamina può scorrere senza attrito lungo r. A partire da un dato istante, il punto A della lamina inizia a muoversi di moto armonico $y(t) = 3\ell \cos\omega t$ e il piano contenente la lamina ruota con velocità angolare costante $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}_y$ attorno ad r. Qual è il più grande valore di ω compatibile con il contatto della lamina con r durante un'oscillazione completa del punto A?*



Poniamoci in un sistema di riferimento solidale alla lamina. Oltre alla forza peso, alla reazione di cerniera applicata in A e al sistema di forze di contatto agenti sul lato AB, in questo sistema occorre anche considerare due forze fittizie: la forza centrifuga dovuta alla rotazione del piano contenente la lamina e la forza inerziale dovuta alla traslazione non uniforme della lamina. La forza centrifuga ha risultante

$$\mathbf{R}_\omega = \frac{m\ell\omega^2}{2}\boldsymbol{e}_x$$

che si può considerare applicato nel centro di massa. Ciò è vero *solo* in virtù della geometria della lamina e della sua posizione rispetto all'asse di rotazione. Per rendersene conto, oltre alla verifica esplicita, si può ricorrere ad un argomento euristico. Si immagini di suddividere la lamina in strisce verticali di ugual spessore, piccolo rispetto ad ℓ. Su tutti i punti di una striscia, che si trovano approssimativamente alla *stessa* distanza dall'asse di rotazione, la forza centrifuga ha densità costante: il risultante si applica nel punto di mezzo della striscia. Ripetendo il ragionamento su tutte le strisce riduciamo le forze centrifughe ad un sistema di vettori paralleli, applicati lungo una retta orizzontale passante per il centro della lamina: il risultante di tale sistema è sicuramente applicabile nel centro della lamina.

Il risultante delle forze fittizie è pari a

$$\mathbf{R} = -m\ddot{y}(t)\boldsymbol{e}_y = 3m\omega^2\ell\cos\omega t\boldsymbol{e}_y$$

ed è pure applicato nel centro della lamina. La condizione di contatto tra la lamina e la retta r richiede che le reazioni vincolari lungo AB siano orientate lungo $\boldsymbol{e}_x$ e dunque che il momento da esse generato rispetto ad A sia del tipo $\psi\boldsymbol{e}_z$, con $\psi \geq 0$. Imponendo l'equilibrio dei momenti rispetto ad A ricaviamo

$$\psi + \frac{m\ell^2\omega^2}{4} - mg\frac{\ell}{2} + \frac{3m\omega^2\ell^2}{2}\cos\omega t = 0$$

da cui abbiamo anche

$$\psi = -\frac{7m\ell^2\omega^2}{2} + mg\frac{\ell}{2} \geq 0:$$

il contatto della lamina con r permane finché

$$\omega \leq \sqrt{\frac{2g}{7\ell}}.$$

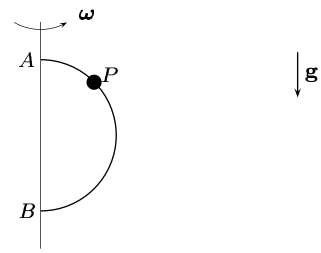
E3. *In un piano verticale, un anellino P di massa m è vincolato a scorrere senza attrito lungo un profilo semicircolare di raggio R, posto in rotazione con velocità angolare $\boldsymbol{\omega} = 2\omega\boldsymbol{e}_y$ costante attorno al diametro AB. Qual è l'estremo inferiore dei valori di R che garantiscono la stabilità della posizione di equlibrio in cui l'anellino* **non** *si trova sull'asse di rotazione?*

Sia ϑ l'angolo che il raggio passante per P forma con la verticale. L'energia potenziale V consta di due termini, uno dovuto alla forza peso, l'altro dovuto alla forza centrifuga:

$$V = mgR\cos\vartheta - 2m\omega^2R^2\sin^2\vartheta.$$

Le posizioni di equilibrio risolvono l'equazione $V' = 0$, cioè

$$mR\sin\vartheta[-g - 4\omega^2R\cos\vartheta] = 0$$



che, oltre alle soluzioni $\vartheta = 0$ e $\vartheta = \pi$ corrispondenti a configurazioni in cui P sta su AB, ha la soluzione

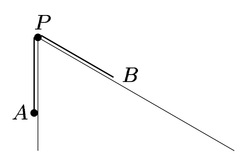
$$\vartheta = \arccos \frac{g}{4\omega^2 R}$$

a patto che $\frac{g}{4\omega^2 R} \le 1$, ovvero che $R \ge \frac{g}{4\omega^2}$. Per discuterne la stabilità osserviamo che

$$V'' = mr\{\cos\vartheta[-g-4\omega^2 R\cos\vartheta]+4\omega^2 R\sin^2\vartheta\} = mr[-g\cos\vartheta-8\omega^2 R\cos^2\vartheta+4\omega^2 R] :$$

sostituendo il valore $\frac{g}{4\omega^2 R}$ per $\cos\vartheta$ vediamo che $V'' > 0$ quando $R > \frac{g}{4\omega^2}$. Dunque l'estremo inferiore dei valori di R che garantiscono la stabilità della configurazione è $\frac{g}{4\omega^2}$.

E4. *In un piano verticale, un filo AB omogeneo di peso specifico $5p$ e lunghezza L è appoggiato per un tratto BP lungo s ad un profilo rettilineo scabro di coefficiente di attrito statico μ ed inclinato sulla verticale di un angolo $\frac{\pi}{3}$. Il filo passa in P per un piolo di raggio trascurabile che non offre attrito e reca all'estremo A un punto materiale di peso pL. Determinare il minimo valore di μ affinché all'equilibrio sia $s = \frac{3L}{4}$.*



Spezziamo il filo in P. L'equilibrio del tratto AP richiede

$$\tau(P) = pL + \frac{5pL}{4} = \frac{9pL}{4}$$

dove abbiamo considerato anche il peso di AP, oltre che del punto materiale A. Per il tratto PB, l'equazione di equilibrio indefinita lungo la direzione tangenziale è

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s} + f_t + \phi_t = 0,$$

dove s è l'ascissa curvilinea di PB, contata a partire da B, $f_t = -\frac{5p}{2}$ è la componente del peso specifico lungo la tangente al filo e ϕ_t la componente tangenziale della forza reattiva. Similmente, visto che la curvatura del filo è nulla, l'equazione di equilibrio lungo la normale al filo è

$$f_n + \phi_n = 0.$$

La condizione di COULOMB-MORIN impone poi $|\phi_t| \leq \mu|\phi_n|$ cioè, in questo caso,

$$\left\| \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s} - \frac{5p}{2} \right\| \leq \mu \frac{5p\sqrt{3}}{2}.$$

Eliminando il modulo, l'unica disequazione significativa è

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s} \leq \frac{5p}{2}[1 + \mu\sqrt{3}]$$

ovvero, integrando da B a P,

$$\tau(P) - \tau(B) \leq \frac{15pL}{8}[1 + \mu\sqrt{3}],$$

dove abbiamo ricordato che, all'equilibrio, deve essere $s = \frac{3L}{4}$. Poiché la tensione in B è nulla, se sostituiamo il valore di $\tau(P)$ trovato prima abbiamo

$$\mu \geq \frac{1}{5\sqrt{3}}.$$