D1. *Si consideri il seguente sistema di vettori applicati piani:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 & = -\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_x - 4\boldsymbol{e}_y \text{ applicato in } P_1 - O \equiv (2,3) \\ \boldsymbol{v}_2 & = 3\boldsymbol{e}_x + 4\boldsymbol{e}_y \text{ applicato in } P_2 - O \equiv (1,2) \\ \boldsymbol{v}_3 & = -\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_x - 4\boldsymbol{e}_y \text{ applicato in } P_3 - O \equiv (3,1) \end{cases}$$

Trovare l'equazione dell'asse centrale.

Il risultante del sistema è dato da

$$\boldsymbol{R} = 2(\boldsymbol{e}_x - 2\boldsymbol{e}_y),$$

con modulo

$$\boldsymbol{R}^2 = 4(1+4) = 20;$$

inoltre, il momento totale rispetto ad O è:

$$\boldsymbol{M}_O = -20\boldsymbol{e}_z.$$

Considerando che i punti $P(\lambda)$ appartenenti all'asse centrale obbediscono all'equazione

$$P(\lambda) - O = \frac{\boldsymbol{R} \wedge \boldsymbol{M}_O}{\boldsymbol{R}^2} + \lambda \boldsymbol{R},$$

si ha per tale asse, in forma parametrica,

$$\begin{cases} x & = 4 + 2\lambda \\ y & = 2 - 4\lambda, \end{cases}$$

che, eliminando il parametro λ dà la soluzione corretta, ossia:

$$y = -2x + 10.$$

D2. *Trovare la torsione della curva di equazione parametrica*

$$(u^2 - 1)\boldsymbol{e}_x + \frac{1}{3}(u-1)^3\boldsymbol{e}_y + 2u\boldsymbol{e}_z$$

nel punto in cui $u = 0$.

È necessario calcolare le derivate di $P(u)$ fino al secondo ordine:

$$P'(u) = 2u\boldsymbol{e}_x + (u-1)^2\boldsymbol{e}_y + 2\boldsymbol{e}_z, \qquad P''(u) = 2\boldsymbol{e}_x + 2(u-1)\boldsymbol{e}_y.$$

La curvatura κ della curva è data da:

$$\kappa(u) = \frac{|P' \wedge P''|}{|P'|^3}.$$

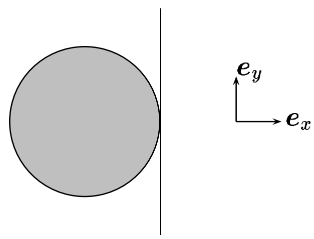
Poniamo $u = 0$ nelle derivate e otteniamo:

$$P'(0) = \boldsymbol{e}_y + 2\boldsymbol{e}_z, \quad P''(0) = 2\boldsymbol{e}_x - 2\boldsymbol{e}_y \qquad P'(0) \wedge P''(0) = 2\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y - 2\boldsymbol{e}_z,$$

da cui si ha:

$$\kappa(0) = \frac{6}{5\sqrt{5}}.$$

D3. *In un piano, un'asta omogenea di massa $2m$ e lunghezza $2R$ è appoggiata nel suo punto medio ad un disco di massa $3m$ e raggio $\frac{1}{\sqrt{3}}R$ (Figura 1). Trovare il momento centrale di inerzia complessivo nella direzione $\boldsymbol{e}_y$.*



Per definizione, il momento centrale di inerzia I_{Cy} nella direzione $\boldsymbol{e}_y$ è dato da $\boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{I}_C \boldsymbol{e}_y$, dove $\boldsymbol{I}_C$ indica il tensore centrale d'inerzia, ossia calcolato nel centro di massa C del sistema. È facile nel nostro caso calcolare il tensore d'inerzia $\boldsymbol{I}_O$ rispetto al centro O del disco, considerando che questo è il baricentro del disco stesso, e ricorrendo al teorema di Huygens-Steiner per il contributo dell'asta. Una volta noto $\boldsymbol{I}_O$, un ulteriore utilizzo di tale teorema consente di determinare $\boldsymbol{I}_C$.

Innanzitutto, determiniamo la distanza d fra O e C; in base alla definizione di centro di massa, abbiamo:

$$d = \frac{2m\frac{1}{\sqrt{3}}R + 0}{(3+2)m} = \frac{2}{5\sqrt{3}}R;$$

si ha quindi:

$$I_{Cy} = I_{Oy} - m_t d^2,$$

in cui m_t indica la massa totale del sistema disco+asta, ossia $m_t = 5m$.
Svolgendo i calcoli, otteniamo:

$$I_{Cy} = \frac{1}{4} 2m \frac{1}{3} R^2 + 2m \frac{1}{3} R^2 - 5m \frac{\frac{1}{3} 4R^2}{5^2},$$

cioè

$$I_{Cy} = \frac{13}{20} m R^2.$$

D4. *Qual è, tra le seguenti, l'espressione corretta della seconda equazione cardinale della dinamica rispetto ad un punto O avente velocità $\boldsymbol{v}_O \neq \boldsymbol{0}$ per un sistema avente quantità di moto $\boldsymbol{Q}$, momento della quantità di moto rispetto ad O pari a $\boldsymbol{K}_O$, soggetto a forze esterne di momento $\boldsymbol{M}_O^e$ rispetto ad O?*

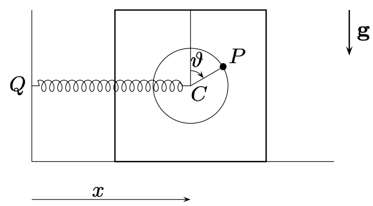
- $\dot{\boldsymbol{K}}_O = \boldsymbol{M}_O^e$

- $\ddot{\boldsymbol{K}}_O = \boldsymbol{M}_O^e$
- $\dot{\boldsymbol{K}}_O = \boldsymbol{M}_O^e + \boldsymbol{Q} \wedge \boldsymbol{v}_O$
- $\dot{\boldsymbol{K}}_O = \dot{\boldsymbol{Q}} \wedge \boldsymbol{v}_O$

Poiché viene detto esplicitamente che la velocità $\boldsymbol{v}_O$ del polo scelto per calcolare i momenti non è nulla, l'unica risposta corretta è

$$\dot{\boldsymbol{K}}_O = \boldsymbol{M}_O^e + \boldsymbol{Q} \wedge \boldsymbol{v}_O$$

E1. *In un piano verticale, una lamina quadrata omogenea di massa $2m$ e lato ℓ trasla senza attrito lungo una guida orizzontale ed ha il centro di massa c attratto da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla verso un punto Q posto alla stessa quota di C. Nella lamina è praticata una scanalatura circolare di raggio $\frac{\ell}{2}$ e centro C su cui è libero di muoversi senza attrito un punto materiale P di massa $4m$. Introdotte le coordinate lagrangiane x e ϑ indicate in Figura 2, qual è l'equazione di* LAGRANGE *relativa alla variabile x?*



Le coordinate libere sono già indicate dal testo, pertanto possiamo passare direttamente al calcolo della lagrangiana L. A tale scopo, occorre calcolare l'energia cinetica e quella potenziale del sistema.

Osserviamo, anzitutto, che è possibile scrivere la velocità $\boldsymbol{v}_P$ del punto P sommando la velocità relativa di tale punto rispetto alla lamina con quella di trascinamento di quest'ultima; ossia, ponendo $R = \frac{l}{2}$:

$$\boldsymbol{v}_P = (\dot{x} + R\,\dot{\vartheta}\cos\vartheta)\boldsymbol{e}_x - R\,\dot{\vartheta}\sin\vartheta\boldsymbol{e}_y.$$

Pertanto, l'energia cinetica T totale risulta essere

$$T = m\,\dot{x}^2 + 2m(\dot{x}^2 + R^2\,\dot{\vartheta}^2 + 2R\,\dot{x}\dot{\vartheta}\cos\vartheta),$$

e quella potenziale V, invece,

$$V = \frac{1}{2}kx^2 + f(\vartheta),$$

dove $f(\vartheta)$ è il contributo dell'energia potenziale gravitazionale, che dipende unicamente da ϑ, e, pertanto, non interverrà nel calcolo richiesto: infatti, l'equazione di LAGRANGE relativa alla variabile x si ottiene da:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\,\dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x},$$

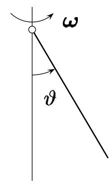
con $L = T - V$. Sviluppando i calcoli, si ottiene, dunque:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2m\,\dot{x} + 4m\,\dot{x} + 4mr\,\dot{\vartheta}\cos\vartheta) = -kx,$$

ossia

$$6m\,\ddot{x} + 2ml(\ddot{\vartheta}\cos\vartheta - \dot{\vartheta}^2\sin\vartheta) + kx = 0.$$

E2. *In un piano verticale, un'asta omogenea di lunghezza 4ℓ e massa m ha un estremo incernierato senza attrito ad un asse verticale r (Figura 3). Il piano in cui giace l'asta ruota attorno ad r con velocità angolare costante ω. Per quale valore di ω esiste una configurazione di equilibrio in cui l'angolo ϑ che l'asta forma con r vale $\frac{\pi}{3}$?*



Poniamoci nel sistema di riferimento rotante non inerziale; in esso, sull'asta agisce, oltre alla forza peso e alla reazione del vincolo, anche la forza centrifuga, che ammette energia potenziale, al pari di quella gravitazionale.

Scegliendo l'origine del riferimento rotante nel punto O in cui l'estremo dell'asta è incernerato, e $\boldsymbol{r}$ un versore nella direzione dell'asse di rotazione, possiamo scrivere l'energia potenziale centrifuga V_c come:

$$V_c(\vartheta) = -\frac{1}{2}I_{Or}(\vartheta)\omega^2,$$

dove I_{Or} è il momento d'inerzia nella direzione $\boldsymbol{r}$, che possiamo determinare conoscendo il tensore d'inerzia $\boldsymbol{I}_O$, che è, grazie al teorema di HUYGENS-STEINER:

$$\boldsymbol{I}_O = \frac{16}{3}ml^2(\boldsymbol{\eta}_x \otimes \boldsymbol{\eta}_x + \boldsymbol{\eta}_z \otimes \boldsymbol{\eta}_z),$$

usando una terna di versori in cui $\boldsymbol{\eta}_x$ è orientato come $G-O$, se G è il centro di massa dell'asta, e $\boldsymbol{\eta}_y$ ed $\boldsymbol{\eta}_z$ sono ortogonali a $\boldsymbol{\eta}_x$, e, rispettivamente, nel piano del disegno, e ortogonale ad esso. Inoltre, $\boldsymbol{r} = \cos\vartheta\boldsymbol{\eta}_x - \sin\vartheta\boldsymbol{\eta}_y$,, se orientiamo $\boldsymbol{r}$ verso il basso. Con queste notazioni, otteniamo:

$$I_{Or}(\vartheta) = \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{I}_O\boldsymbol{r} = \frac{16}{4}ml^2\sin^{\vartheta}.$$

L'energia potenziale totale $V(\vartheta)$ risulta pertanto essere

$$V(\vartheta) = -2mgl\cos\vartheta - \frac{8}{3}ml^2\omega^2\sin^2\vartheta.$$

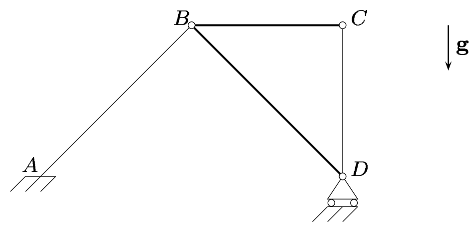
Poiché $V(\vartheta)$ deve essere stazionaria nella posizione di equilibrio, se vogliamo che $\vartheta = \frac{\pi}{3}$ sia di equilibrio, la derivata $V'(\vartheta)$ dovrà essere nulla per tale valore dell'angolo. Sviluppando i calcoli, si ha:

$$V'(\vartheta) = 2mgl\sin\vartheta - \frac{16}{3}m\omega^2l^2\sin\vartheta\cos\vartheta,$$

e, imponendo $V'(\frac{\pi}{3}) = 0$, otteniamo:

$$\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

E3. *La struttura rigida riportata in Figura 4 è composta da quattro aste AB e BD di lunghezza $\ell\sqrt{2}$, BC e CD di lugnhezza ℓ. BC e BD hanno peso $4p$ e $6p$, rispettivamente, mentre le aste restanti sono di peso trascurabile. La struttura è collegata a terra da un incastro in A e da un carrello bilatero in D. Determinare il modulo del momento flettente nel punto medio di AB.*



Eliminando l'asta CD, possiamo determinare l'azione $\boldsymbol{N}_{CD}$ che questa esercita sul resto del sistema osservando che essa è scarica, e sollecitata agli estremi da forze e non da momenti, grazie ai due vincoli (cerniere) in C e D; pertanto, nel sistema piano esiste solo una componente utile di tale azione, diretta come la congiungente gli estremi dell'asta. Scrivendo la seconda equazione cardinale per l'asta BC scegliendo B come polo, l'unica incognita è $\boldsymbol{N}_{CD}$, che pertanto risulta essere, usando i versori indicati nella figura:

$$\boldsymbol{N}_{CD} = 3p\boldsymbol{e}_y.$$

Sull'estremo D dell'asta BD, quindi, agiscono le forze $-\boldsymbol{N}_{CD}$ e la reazione $\boldsymbol{\Phi}$ del carrello in D su tutto il sistema; questa verrà determinata scrivendo la seconda equazione cardinale per l'asta BD scegliendo sempre B come polo, per non introdurre nuove incognite. Si ottiene:

$$\boldsymbol{\Phi} = 5p\boldsymbol{e}_y;$$

a questo punto, usando la proiezione lungo le direzione $\boldsymbol{e}_x$ e $\boldsymbol{e}_y$ della prima equazione cardinale, possiamo determinare le azioni che la cerniera in B esercita sulle aste BC e BD: da queste, in base al terzo principio della dinamica, ricaviamo la sollecitazione $\boldsymbol{\Psi}$ nell'estremo in B di AB. Si ha, con semplici passaggi:

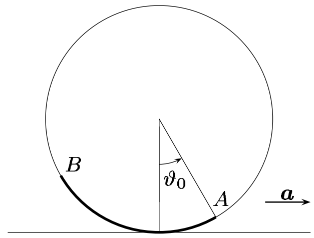
$$\boldsymbol{\Psi} = -5p\boldsymbol{e}_y.$$

Immaginando di spezzare AB nel suo punto medio M, il momento flettente M_f in tale punto dovrà bilanciare quello dovuto a $\boldsymbol{\Psi}$ e null'altro, poiché il resto dell'asta non è sollecitata se non in A. Scrivendo, quindi, la seconda equazione cardinale per MB scegliendo M come polo si avrà:

$$M_f = \frac{5}{2}pl$$

(orientato in senso antiorario).

E4. *In un piano verticale, un filo AB di peso specifico p costante e lunghezza $\frac{\pi R}{2}$ è appoggiato senza attrito ad un supporto circolare di raggio R. Il supporto è saldato ad una guida che trasla con accelerazione costante $\boldsymbol{a} = \frac{g}{8}\boldsymbol{e}_x$ (Figura 5). Qual è il valore dell'angolo ϑ_0 -valutato in senso orario- formato dall'estremo libero A del filo in condizioni di equilibrio?*



Poniamoci nel sistema di riferimento non inerziale che trasla con l'accelerazione $\boldsymbol{a}$ del supporto; in esso, su ogni porzione del filo è efficace, oltre alla gravità, anche la forza apparente avente densità lineare $\boldsymbol{f}_a = -\rho \boldsymbol{a}$, se ρ indica la massa di filo per unità di lunghezza: tale forza risulta essere conservativa, e ammette quindi energia potenziale specifica. Per il calcolo di quest'ultima osserviamo che le due forze agenti sul filo sono entrambe costanti, quindi, detta $\boldsymbol{f}$ la forza specifica totale e v l'energia potenziale specifica totale, abbiamo, a meno di una costante additiva:

$$v = -\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{r},$$

con

$$\boldsymbol{f} = -\frac{g}{8}\boldsymbol{e}_x - g\boldsymbol{e}_y,$$

e $\boldsymbol{r}$ il vettore posizione di ogni punto del filo nel sistema di riferimento mobile; scegliendo in esso come origine O il centro del profilo circolare, potremo scrivere v in funzione dell'angolo ϑ_0. La tensione τ del filo appoggiato a un vincolo liscio è del tipo $\tau = v + c$, con c una costante. valere Notiamo che, essendo A e B estremi liberi, le tensioni in tali punti sono nulle, cioè $\tau_A = \tau_B = 0$; pertanto la formula appena scritta ci garantisce che deve essere $v_A = v_B$. Inoltre, si vede immediatamente che poiché l'angolo POA è complementare di quello POB, possiamo scrivere in funzione di ϑ_0 l'uguaglianza precedente. Esplicitando l'espressione del potenziale specifico, abbiamo (l'indice dei simboli indica il punto nel quale le grandezze corrispondenti vengono valutate):

$$v_A = -\boldsymbol{f}_A \cdot (A - O) = R\frac{\rho g}{8}\sin\vartheta_0 - R\rho g\cos\vartheta_0,$$

e

$$v_B = -\boldsymbol{f}_B \cdot (B - O) = -R\frac{\rho g}{8}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta_0\right) - R\rho g\cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta_0\right).$$

Usando semplici relazioni trigonometriche, e sfruttando l'uguaglianza dei potenziali specifici nei due punti, otteniamo, dopo semplici passaggi:

$$\left(1 + \frac{1}{8}\right)\sin\vartheta_0 = \left(1 - \frac{1}{8}\right)\cos\vartheta_0,$$

cioè

$$\tan\vartheta_0 = \frac{7}{9}.$$