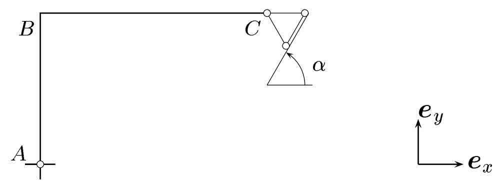
Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Esame di Meccanica Razionale
Appello del 31 gennaio 2002
Soluzioni

D1. *Un'asta ABC ha l'estremo A vincolato da una cerniera cilindrica e l'estremo C vincolato da un carrello. Sia α l'angolo che la direzione di scorrimento del carrello forma con $\boldsymbol{e}_x$. Se $AB = \ell$ e $BC = 7\ell$, per quale valore di α la struttura è labile?*



La cerniera cilindrica in A esplica una reazione

$$\boldsymbol{\Phi}_A = \Phi_{Ax}\boldsymbol{e}_x + \Phi_{Ay}\boldsymbol{e}_y$$

ed il carrello una reazione $\boldsymbol{\Phi}_C$, ortogonale alla direzione di scorrimento

$$\boldsymbol{\Phi}_C = \Phi_C(-\sin\alpha\boldsymbol{e}_x + \cos\alpha\boldsymbol{e}_y).$$

Se la retta passante per C e diretta come $\boldsymbol{\Phi}_C$ non passa per A, allora dall'equilibrio dei momenti rispetto ad A ricaviamo $\Phi_C = 0$. A questo punto, l'equilibrio delle forze impone anche $\boldsymbol{\Phi}_A = \boldsymbol{0}$: solo la soluzione banale esiste in assenza di carico e la struttura è isostatica. Se, al contrario, la retta per C e diretta come $\boldsymbol{\Phi}_C$ passa per A, l'equilibrio dei momenti non dà informazioni e quello delle forze impone $\boldsymbol{\Phi}_A = -\boldsymbol{\Phi}_C$: in assenza di carico il problema di equilibrio ha infinite soluzioni. Poiché caricando la struttura con una coppia l'equilibrio dei momenti in A per la struttura viene meno, concludiamo che la struttura è *labile*. Dalla geometria del problema abbiamo che l'angolo BAC ha ampiezza $\arctan 7$ per cui la labilità si sviluppa quando $\alpha = -\arctan 7$.

D2. *Trovare la torsione della curva di equazione parametrica*

$$P(\vartheta) - O = R[3\vartheta\cos\vartheta\boldsymbol{e}_x + 3\vartheta\sin\vartheta\boldsymbol{e}_y - 2\vartheta\boldsymbol{e}_z]$$

nel punto in cui $\vartheta = 0$.

Calcoliamo le derivate di $P(\vartheta)$ fino al terzo ordine.

$$P'(\vartheta) = R[3(\cos\vartheta - \vartheta\sin\vartheta)\boldsymbol{e}_x + 3(\sin\vartheta + \vartheta\cos\vartheta)\boldsymbol{e}_y - 2\boldsymbol{e}_z],$$

$$P''(\vartheta) = R[3(-2\sin\vartheta - \vartheta\cos\vartheta)\boldsymbol{e}_x + 3(2\cos\vartheta - \vartheta\sin\vartheta)\boldsymbol{e}_y],$$
$$P'''(\vartheta) = R[3(-3\cos\vartheta + \vartheta\sin\vartheta)\boldsymbol{e}_x + 3(-3\sin\vartheta - \vartheta\cos\vartheta)\boldsymbol{e}_y].$$

La torsione τ della curva è

$$\tau = -\frac{P' \wedge P'' \cdot P'''}{|P' \wedge P''|^2}.$$

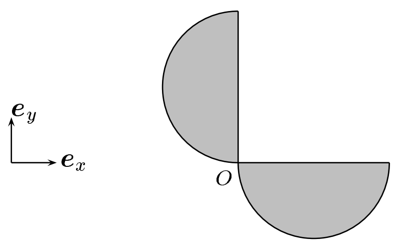
Ponendo $\vartheta = 0$ nelle derivate appena trovate, abbiamo

$$P' \wedge P''(0) = 6R^2(3\boldsymbol{e}_z + 2\boldsymbol{e}_x), \quad P'''(0) = -9R\boldsymbol{e}_x$$

da cui otteniamo

$$\tau(0) = \frac{3}{13R}.$$

D3. *Due semidischi, entrambi di massa $3m$ e raggio $\sqrt{3}R$, sono disposti come in Figura. Calcolare il momento di inerzia rispetto ad un asse passante per il punto comune O e diretto lungo $\boldsymbol{e}_z$.*



Per definizione, $I_{Oz} = \boldsymbol{e}_z \cdot \mathbb{I}_O \boldsymbol{e}_z$. Per ogni sistema piano composto di punti materiali (P_i, m_i) che giacciono nel piano $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y\}$ cui appartiene anche O deve essere

$$I_{Oz} = \boldsymbol{e}_z \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i[|P_i - O|^2\mathbf{I} - (P_i - O) \otimes (P_i - O)]\boldsymbol{e}_z = \sum_{i=1}^{N} m_i|P_i - O|^2$$

cosicché I_{Oz} dipende solo dalle *distanze* dei punti materiali da O. Ora, se ruotiamo di $\frac{\pi}{2}$ opportunamente uno dei semidischi attorno all'asse passante per O, diretto come $\boldsymbol{e}_z$ otteniamo un disco completo di raggio $\sqrt{3}R$ e massa $6m$. Pertanto, per quanto ora discusso, possiamo calcolare I_{Oz} sul disco ottenendo, grazie alla formula di Huygens-Steiner,

$$I_{Oz} = 27mR^2.$$

D4. *Un sistema materiale è descritto dalle coordinate lagrangiane (q_1, q_2). Sia $m > 0$ una massa caratteristica del sistema. Quale, tra le seguenti funzioni, può rappresentare l'energia cinetica del sistema?*

○ $T = m(3\dot{q}_1^2 - 5\dot{q}_2^2)$ ○ $T = 4m\dot{q}_1^2$ ○ $T = m(\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_2^2 + 12\dot{q}_1\dot{q}_2)$
○ $T = m(\dot{q}_1^2 + 6\dot{q}_2^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2)$ ○ $T = -m(\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2)^2$ ○ $T = 4m\dot{q}_1\dot{q}_2$

Occorre determinare quale, tra le forme quadratiche $T(\dot{q}_1, \dot{q}_2)$, è definita positiva. Questa richiesta porta ad escludere $T = m(3\dot{q}_1^2 - 5\dot{q}_2^2)$, che ha un autovalore negativo, $T = 4m\dot{q}_1^2$ che ha un autovalore nullo (T dipende da *due* variabili: $\dot{q}_1$ e $\dot{q}_2$), $T = -m(\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2)^2$ che ha entrambi gli autovalori negativi e $T = 4m\dot{q}_1\dot{q}_2$ che ha determinante negativo. Quanto a $T = m(\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_2^2 + 12\dot{q}_1\dot{q}_2)$, la forma quadratica associata $A_{ij} := \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_1 \dot{q}_2}$ è

$$A = \begin{pmatrix} 2m & 12m \\ 12m & 4m \end{pmatrix} :$$

ha determinante negativo e non può essere associata ad un'energia cinetica. Al contrario, per $T = m(\dot{q}_1^2 + 6\dot{q}_2^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2)$ abbiamo

$$A = \begin{pmatrix} 2m & 2m \\ 2m & 12m \end{pmatrix}$$

che è definita positiva e può pertanto essere associata all'energia cinetica di un sistema meccanico a due gradi di libertà, soggetto a vincoli olonomi e scleronomi.

E1. *Si consideri il seguente sistema di vettori applicati:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{e}_z & \textit{applicato in } P_1 - O \equiv (0, -4\cos\omega t, 0), \\ \boldsymbol{v}_2 = 2\boldsymbol{e}_x & \textit{applicato in } P_2 - O \equiv (2\sin\omega t, 0, 0), \\ \boldsymbol{v}_3 = 3(\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y) & \textit{applicato in } P_3 - O \equiv (3\cos\omega t, 3\sin\omega t, 0). \end{cases}$$

Trovare il valore di $\tan\omega t$ *negli istanti in cui il trinomio invariante raggiunge un valore estremo.*

Poiché il risultante del sistema è

$$\mathbf{R} = 5\boldsymbol{e}_x + 3\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z$$

ed il momento rispetto ad O è

$$\mathbf{M}_O = -4\cos\omega t \boldsymbol{e}_x + 9(\cos\omega t - \sin\omega t)\boldsymbol{e}_z,$$

il trinomio invariante è dato da

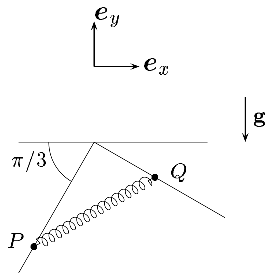
$$\mathcal{I} = -11\cos\omega t - 9\sin\omega t.$$

$\mathcal{I}$ raggiunge i valori estremi quando $\mathcal{I}' = 0$, cioè per

$$\tan\omega t = \frac{9}{11}.$$

È possibile verificare che i punti critici trovati corrispondono effettivamente a punti di massimo o minimo del trinomio invariante e non a dei flessi.

E2. *In un piano verticale, due punti materiali P e Q di masse $2m$ e $3m$, rispettivamente, sono vincolati a muoversi senza attrito lungo due guide ortogonali, inclinate sull'orizzontale come indicato in Figura. I punti P e Q sono collegati da una molla di costante elastica $3k$ e lunghezza a riposo nulla. Trovare le frequenze delle piccole oscillazioni del sistema in un intorno della posizione di equilibrio stabile.*



Introduciamo l'ascissa s di P e l'ascissa u di Q, entrambe valutate partendo dal punto comune alle due guide. L'energia potenziale è

$$V(s,u) = -mg\sqrt{3}s - \frac{3mg}{2}u + \frac{3k}{2}(s^2+u^2)$$

e l'unica configurazione di equilibrio è la soluzione dell'equazione $\nabla V = \mathbf{0}$:

$$s = \frac{mg\sqrt{3}}{3}, \quad u = \frac{mg}{2k}.$$

Si tratta di una configurazione di equilibrio stabile in quanto la forma hessiana di V

$$B = \begin{pmatrix} 3k & 0 \\ 0 & 3k \end{pmatrix}$$

è definita positiva. L'energia cinetica è

$$T = m\dot{s}^2 + \frac{3m}{2}\dot{u}^2$$

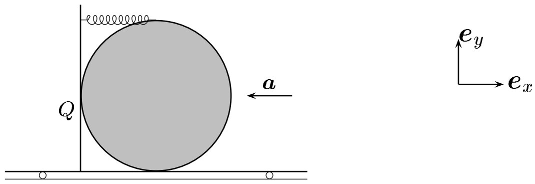
e ad essa va associata la forma quadratica

$$A = \begin{pmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 3m \end{pmatrix}.$$

Entrambe le forme quadratiche sono già in forma diagonale e le frequenze delle piccole oscillazioni sono

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3k}{2m}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

E3. *In un piano verticale una guida trasla con accelerazione* $\boldsymbol{a} = -\frac{6R}{T^4}t^2\boldsymbol{e}_x$, *dove* T *è un tempo caratteristico. Sulla guida si trova un disco omogeneo di massa* m *e raggio* R *che può rotolare senza strisciare sulla guida. Sul disco, appoggiato senza attrito in* Q *ad una parete verticale, agisce una molla di costante elastica* $2k$ *e lunghezza a riposo nulla, applicata come in Figura. A partire da quale istante cessa il contatto tra la parete ed il disco?*



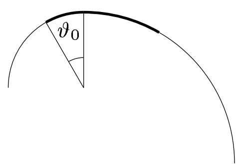
Poniamoci nel riferimento solidale alla guida. Oltre alla forza elastica, al peso e alle reazioni di contatto con la parete e la guida, sul disco è efficace anche la forza fittizia $-m\boldsymbol{a}$, applicata nel suo centro di massa. Il contatto con la parete verticale è garantito finché la reazione $\boldsymbol{\Phi}_Q = \Phi_Q\boldsymbol{e}_x$ è tale che $\Phi_Q \geq 0$. L'equilibrio dei momenti rispetto al punto di contatto del disco con la guida orizzontale richiede

$$\Phi_Q = 4kR - \frac{6mR^2}{T^4}t^2$$

ed il contatto è garantito finché

$$t \leq T^2\sqrt{\frac{2k}{3m}}\,.$$

E4. *In un piano verticale, un filo di peso specifico costante* p *e lunghezza* $\pi R/2$ *è appoggiato senza attrito ad un supporto formato da due quadranti aventi raggio* $R/2$ *e* R*. Trovare il valore dell'angolo* ϑ_0 *in condizioni di equilibrio.*



La tensione del tratto di filo appoggiato al quadrante di raggio $R/2$ è del tipo $\tau = v + c$, con v energia potenziale specifica e c una costante; similmente, per il tratto restante è $\tau = v + c^*$. Nel punto comune dei due tratti la quota è ovviamente la stessa e le due tensioni debbono coincidere, per cui $c = c^*$. D'altra parte, se ϑ_1 è il valore all'equilibrio dell'angolo formato con la verticale dal filo che giace sul supporto di raggio R, dobbiamo avere $\tau(\vartheta_0) = \tau(\vartheta_1) = 0$, visto che agli estremi non è applicato alcun carico. Dunque la condizione di equilibrio diventa $v(\vartheta_0) = v(\vartheta_1)$, cioè

$$p\frac{R}{2}(1 + \cos\vartheta_0) = pR\cos\vartheta_1 \tag{1}$$

Il vincolo sulla lunghezza del filo impone

$$\frac{\pi R}{2} = \frac{R\vartheta_0}{2} + R\vartheta_1$$

da cui otteniamo $\vartheta_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\vartheta_0}{2}$ che permette di riscrivere (1) come equazione per ϑ_0

$$\sin\frac{\vartheta_0}{2} = 1 - \sin^2\frac{\vartheta_0}{2},$$

dove abbiamo impiegato le formule trigonometriche di duplicazione. Risolvendo quest'ultima equazione rispetto a $\sin\frac{\vartheta_0}{2}$, ricaviamo

$$\vartheta_0 = 2\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$