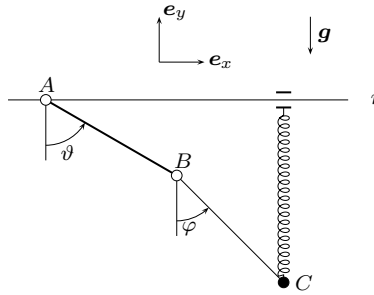


Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Esame di Meccanica Razionale
Appello del 31 marzo 2005
Soluzioni (Parte I)

Q1. In un piano verticale, un'asta di massa $2m$ e lunghezza ℓ ha l'estremo A incernierato ad un punto fisso di una guida orizzontale r . L'altro estremo B è incernierato ad una seconda asta BC di massa trascurabile e lunghezza ℓ che reca in C una massa puntiforme $3m$. Su C agisce una forza elastica di costante $8mg/\ell$ che richiama C verso il punto di r posto sulla verticale per C . Introdotti gli angoli ϑ e φ indicati in Figura 1, trovare le coppie $(\ddot{\vartheta}(0), \ddot{\varphi}(0))$ all'istante $t = 0$ nel quale il sistema viene rilasciato dalla configurazione $\vartheta = \pi/2$ e $\varphi = 0$, con atto di moto individuato dalle condizioni $\dot{\vartheta}(0) = \dot{\varphi}(0) = \sqrt{g/\ell}$.



L'energia cinetica dell'asta AB è

$$T_{AB} = \frac{1}{3}m\ell^2\dot{\vartheta}^2,$$

mentre quella del punto C si ottiene calcolando la velocità di C per derivazione rispetto al tempo del vettore

$$\mathbf{C} - \mathbf{A} = \ell[(\sin \vartheta + \sin \varphi)\mathbf{e}_x - (\cos \vartheta + \cos \varphi)\mathbf{e}_y] :$$

$$\mathbf{v}_C = \ell[(\dot{\vartheta} \cos \vartheta + \dot{\varphi} \cos \varphi)\mathbf{e}_x + (\dot{\vartheta} \sin \vartheta + \dot{\varphi} \sin \varphi)\mathbf{e}_y].$$

Pertanto il contributo di C all'energia cinetica è

$$T_C = \frac{3}{2}m\ell^2[\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\cos(\vartheta - \varphi)].$$

L'energia potenziale V ha tre contributi, dovuti al peso di AB , a quello di C e alla forza elastica applicata in C :

$$V = -mg\ell \cos \vartheta - 3mg\ell(\cos \vartheta + \cos \varphi) + 4mg\ell(\cos \vartheta + \cos \varphi)^2.$$

Per trovare le equazioni di LAGRANGE occorre valutare le derivate

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = \frac{11}{3} m \ell^2 \dot{\vartheta} + 3 m \ell^2 \dot{\varphi} \cos(\vartheta - \varphi),$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vartheta} = -3 m \ell^2 \dot{\varphi} \sin(\vartheta - \varphi) - 4 m g \ell \sin \vartheta + 8 m g \ell \sin \vartheta (\cos \vartheta + \cos \varphi)$$

per l'equazione rispetto a ϑ e

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 3 m \ell^2 [\dot{\varphi} + \dot{\vartheta} \cos(\vartheta - \varphi)],$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 3 m \ell^2 \dot{\vartheta} \dot{\varphi} \sin(\vartheta - \varphi) - 3 m g \ell \sin \varphi + 8 m g \ell \sin \varphi (\cos \vartheta + \cos \varphi)$$

per l'equazione relativa a φ . Infine, poiché

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} \right) = \frac{11}{3} m \ell^2 \ddot{\vartheta} + 3 m \ell^2 \ddot{\varphi} \cos(\vartheta - \varphi) - 3 m \ell^2 \dot{\varphi} (\dot{\vartheta} - \dot{\varphi}) \sin(\vartheta - \varphi)$$

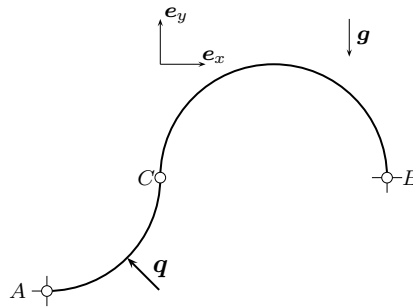
e

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = 3 m \ell^2 [\ddot{\varphi} + \ddot{\vartheta} \cos(\vartheta - \varphi) - \dot{\vartheta} (\dot{\vartheta} - \dot{\varphi}) \sin(\vartheta - \varphi)]$$

e grazie alle condizioni iniziali proposte nel testo concludiamo che, scritte le equazioni di LAGRANGE all'istante $t = 0$,

$$\begin{cases} \ddot{\vartheta}(0) = \frac{3g}{11\ell} \\ \ddot{\varphi}(0) = \frac{g}{\ell} \end{cases}$$

Q2. La struttura rigida riportata in Figura è composta da due aste, AC e CB incerniate tra loro nel punto comune C ed a terra in A e B . L'asta semicircolare CB ha peso $\sqrt{2}p$ e raggio di lunghezza R mentre AC è a forma di quadrante di circonferenza, ha peso trascurabile e raggio R . Nel punto medio dell'arco AC agisce il carico concentrato $\mathbf{q} = 4p\mathbf{n}$, dove $\mathbf{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{e}_y - \mathbf{e}_x)$. Trovare, all'equilibrio l'angolo γ formato con la direzione $\mathbf{e}_x$ dalla reazione vincolare sviluppata in A .



Occorre determinare la reazione

$$\mathbf{\Phi}_A = \Phi_{Ax}\mathbf{e}_x + \Phi_{Ay}\mathbf{e}_y$$

sviluppata dalla cerniera in A per ricavare

$$\gamma = \arctan \frac{\Phi_{Ay}}{\Phi_{Ax}}.$$

Consideriamo la sola asta AC su cui agiscono, oltre al carico $\mathbf{q}$ e alla reazione $\mathbf{\Phi}_A$ la reazione di cerniera sviluppata in C

$$\mathbf{\Phi}_C = \Phi_{Cx}\mathbf{e}_x + \Phi_{Cy}\mathbf{e}_y.$$

L'equilibrio delle forze agenti su AC lungo $\mathbf{e}_y$ richiede

$$\Phi_{Ay} + \Phi_{Cy} + 2p\sqrt{2} = 0. \quad (1)$$

Preso come polo rispetto al quale calcolare i momenti il punto O dove si incontrano la retta verticale passante per A e la retta orizzontale passante per C , abbiamo

$$\Phi_{Ax} + \Phi_{Cy} = 0. \quad (2)$$

Infine, si consideri ora l'asta CB su cui agiscono il peso $-\sqrt{2}p\mathbf{e}_y$, la reazione di cerniera $\mathbf{\Phi}_B = \Phi_{Bx}\mathbf{e}_x + \Phi_{By}\mathbf{e}_y$ applicata in B e la reazione $-\mathbf{\Phi}_C$, applicata in C . L'equilibrio dei momenti per l'asta AC rispetto a B richiede

$$\Phi_{Cy} = -\frac{\sqrt{2}p}{2}$$

che, sostituita in (??) e (??), fornisce

$$\Phi_{Ay} = -\frac{3\sqrt{2}p}{2}$$

e

$$\Phi_{Ax} = \frac{\sqrt{2}p}{2}$$

da cui si ottiene

$$\gamma = \arctan(-3).$$

Q3. *Dati i tensori:*

$$\begin{cases} \mathbf{A} = 3\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x - 2\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_y + 2\mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_z \\ \mathbf{B} = \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_z - 2\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_x \end{cases}$$

ed i vettori

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \gamma\mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \\ \mathbf{v} = \mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y + \gamma\mathbf{e}_z \end{cases}$$

trovare per quale valore di γ si ha $\mathbf{A}\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}\mathbf{u} = 0$.

Con calcoli diretti otteniamo

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = 3\mathbf{e}_x + 2\gamma\mathbf{e}_y - 4\mathbf{e}_z$$

e

$$\mathbf{B}\mathbf{u} = -4\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + \gamma\mathbf{e}_z$$

ed imponendo la condizione di ortogonalità $\mathbf{A}\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}\mathbf{u} = 0$ otteniamo

$$\gamma = -6.$$

Q4. In un piano $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y\}$ un'asta rettilinea AB di lunghezza ℓ , disposta parallelamente ad $\mathbf{e}_x$ è parte di una struttura articolata piana. Nel suo punto medio M è applicato un carico concentrato, $p\mathbf{e}_y \neq \mathbf{0}$. Quale tra le seguenti affermazioni riguardanti lo sforzo assiale $T_{\parallel}$, lo sforzo di taglio $T_{\perp}$ ed il momento flettente $\mathbf{M}_f$ in M è sicuramente corretta?

- ☐ $T_{\parallel}$ e $T_{\perp}$ sono continui, $\mathbf{M}_f$ è discontinuo.
- ☐ Solo $\mathbf{M}_f$ è continuo.
- ☐ $\mathbf{M}_f$ e $T_{\perp}$ sono continui, $T_{\parallel}$ è discontinuo.
- ☐ $T_{\perp}$ è continuo e $\mathbf{M}_f$ ha derivata prima discontinua.
- ☐ $T_{\parallel}$ è continuo, $T_{\perp}$ è discontinuo e $\mathbf{M}_f$ ha derivata prima discontinua.
- ☐ Nessuna delle precedenti

Il carico concentrato non ha componente nella direzione dell'asta e pertanto non può indurre discontinuità nello sforzo assiale, mentre induce discontinuità in quello di taglio. Quanto al momento flettente, esso è continuo in M in quanto non vi sono coppie concentrate. Pertanto la risposta corretta è:
 $T_{\parallel}$ è continuo, $T_{\perp}$ è discontinuo e $\mathbf{M}_f$ ha derivata prima discontinua.