Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Esame di Meccanica Razionale
Appello del 3 Febbraio 2005
Soluzioni (Parte I)

Q1. *Si consideri il seguente sistema di vettori applicati piani:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y & \textit{applicato in } P_1 - O \equiv (1,2,0), \\ \boldsymbol{v}_2 = 2\boldsymbol{e}_y & \textit{applicato in } P_2 - O \equiv (2,0,0), \\ \boldsymbol{v}_3 = 3\boldsymbol{e}_x & \textit{applicato in } P_3 - O \equiv (0,\gamma,0). \end{cases}$$

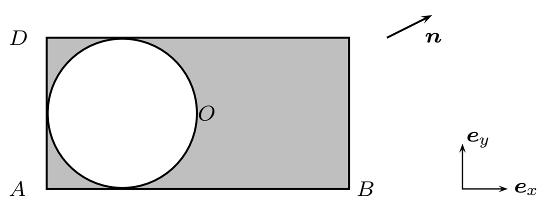
Trovare per quale valore di γ l'asse centrale del sistema passa per l'origine O.

Poiché il sistema è piano, ha trinomio invariante nullo. I punti Q dell'asse centrale, presi come polo nel calcolo del momento del sistema dato sono tali che $\boldsymbol{M}_Q = \boldsymbol{0}$. Dunque basta richiedere l'annullamento di $\boldsymbol{M}_O$ per rispondere al quesito. Svolgendo i calcoli si ottiene

$$\boldsymbol{M}_O = 3(1-\gamma)\boldsymbol{e}_z$$

da cui si ricava $\gamma = 1$.

Q2. *Da una lamina omogenea rettangolare di massa $3m$ e lati $AB = 2\ell$ e $AD = \ell$ viene asportato un disco di raggio $\ell/2$ tangente internamente al rettangolo lungo AD (Figura 2). Trovare il momento di inerzia $I_{\boldsymbol{n}}$ della figura così ottenuta rispetto all'asse passante per il centro O del rettangolo e diretto come $\boldsymbol{n} = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_y$.*



Osserviamo anzitutto che la densità superficiale di massa del materiale di cui è formata la lamina è

$$\sigma = \frac{3m}{2\ell^2}\,,$$

cosicché la massa M del disco è

$$M = \frac{3m\pi}{8\ell^2}\,.$$

In ossequio al principio della lacuna, il momento di inerzia $I_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{n} \cdot \mathbb{I}_O \boldsymbol{n}$ si ottiene sottraendo al termine

$$I_{\boldsymbol{n}}(\mathcal{R}) = \boldsymbol{n} \cdot \mathbb{I}_O(\mathcal{R})\boldsymbol{n}$$

relativo all'intera lamina rettangolare il termine

$$I_{\boldsymbol{n}}(\mathcal{D}) = \boldsymbol{n} \cdot \mathbb{I}_O(\mathcal{D})\boldsymbol{n}$$

relativo al disco asportato. Poiché

$$\mathbb{I}_O(\mathcal{R}) = \frac{m\ell^2}{4}[\boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_x + 4\boldsymbol{e}_y \otimes \boldsymbol{e}_y + 5\boldsymbol{e}_z \otimes \boldsymbol{e}_z]\,,$$

dall'espressione di $\boldsymbol{n}$ e servendosi della definizione di prodotto diadico ricaviamo

$$I_{\boldsymbol{n}}(\mathcal{R}) = \frac{m\ell^2}{4}\boldsymbol{n} \cdot (\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_x + 2\sqrt{3}\boldsymbol{e}_y) = \frac{13m\ell^2}{16}\,.$$

Quanto al contributo del disco, dal teorema di Huygens-Steiner sappiamo che

$$\mathbb{I}_O(\mathcal{D}) = \mathbb{I}_C(\mathcal{D}) + \frac{M\ell^2}{4}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_x)\,,$$

dove C indica il centro di massa del disco. Poiché $\boldsymbol{n}$ è una direzione del piano in cui giace il disco asportato, deve essere

$$\boldsymbol{n} \cdot \mathbb{I}_C(\mathcal{D}) = \frac{M\ell^2}{16} = \frac{3m\ell^2}{128}$$

per cui, in definitiva,

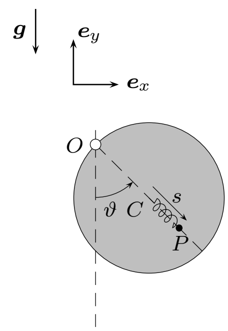
$$I_{\boldsymbol{n}}(\mathcal{D}) = \frac{3m\pi\ell^2}{128} + \frac{9m\pi\ell^2}{128} = \frac{3m\pi\ell^2}{32}\,.$$

Concludendo,

$$I_{\boldsymbol{n}} = \frac{13m\ell^2}{16} - \frac{3\pi m\ell^2}{32} = \frac{3m\ell^2}{16}[\frac{13}{3} - \frac{\pi}{2}]\,.$$

Q3. *In un piano verticale, un disco omogeneo di centro C, massa $m/4$ e raggio R è incernierato senza attrito in un punto fisso O della sua circonferenza. Sul diametro passante per O si muove senza attrito un punto materiale P di massa $3m/5$, attratto verso C da una molla ideale di costante elastica $k = 2mg/R$. Trovare le coppie $(\ddot{s}(0), \ddot{\vartheta}(0))$ se all'istante $t = 0$ il moto parte dalle condizioni $s(0) = R/4$, $\vartheta(0) = \pi/2$, $\dot{s}(0) = -\sqrt{gR}$ e $\dot{\vartheta}(0) = 0$.* (N.B. L'ascissa s di P è contata a partire da C).

L'energia cinetica del sistema consta di due addendi, uno relativo al contributo del disco, l'altro relativo al contributo del punto P. Quanto al disco, esso compie



una rotazione attorno all'asse passante per O, diretto lungo $\boldsymbol{e}_z$, con velocità angolare $\boldsymbol{\omega} = \dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z$ per cui,

$$T(\mathcal{D} = \frac{1}{2}\dot{\vartheta}^2 \boldsymbol{e}_z \cdot \mathbb{I}_O \boldsymbol{e}_z = \frac{3}{16} m R^2 \dot{\vartheta}^2$$

dove si è fatto uso del teorema di Huygens-Steiner per il calcolo del momento di inerzia del disco. Per il punto P, poiché

$$P - O = (R+s)\sin\vartheta \boldsymbol{e}_x - (R+s)\cos\vartheta \boldsymbol{e}_y$$

è anche

$$\boldsymbol{v}_P = [\dot{s}\sin\vartheta + (R+s)\dot{\vartheta}\cos\vartheta]\boldsymbol{e}_x + [(R+s)\sin\vartheta\dot{\vartheta} - \dot{s}\cos\vartheta]\boldsymbol{e}_y$$

da cui segue che il contributo di P all'energia cinetica è

$$T_P = \frac{3}{10} m[\dot{s}^2 + (R+s)^2\dot{\vartheta}^2]\,.$$

In definitiva, l'energia cinetica del sistema è

$$T = \frac{3m}{10}\dot{s}^2 + \frac{3}{2}m[\frac{R^2}{8} + \frac{1}{5}(R+s)^2]\dot{\vartheta}^2\,.$$

L'energia potenziale V del sistema consta di tre termini: un termine, $\frac{mg}{R}s^2$, associato alla forza elastica, un altro termine, $-\frac{mgR}{4}\cos\vartheta$ associato alla forza peso agente sul disco e un ultimo termine, $-\frac{3mg}{5}(R+s)\cos\vartheta$ dovuto alla forza peso agente su P. Sommando i vari contributi otteniamo

$$V = \frac{mg}{R}s^2 - mg[\frac{17R}{20} + \frac{3}{5}s]\cos\vartheta\,.$$

Scritta la Lagrangiana $L = T - V$ possiamo ricavare le equazioni di Lagrange per s e ϑ:

$$\frac{3}{5}\ddot{s} = \frac{3}{5}(R+s)\dot{\vartheta}^2 + \frac{3}{5}g\cos\vartheta - \frac{2g}{R}s\,,$$

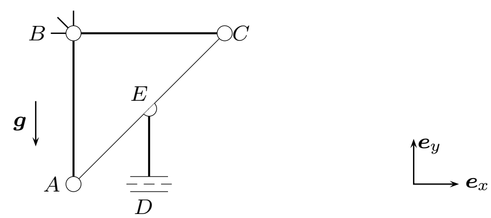
e

$$[\frac{3}{8}R^2 + \frac{3}{5}(R+s)^2]\ddot{\vartheta} + \frac{6}{5}(R+s)\dot{\vartheta}\dot{s} = -g\sin\vartheta(\frac{17}{20}R + \frac{3}{5}s)\,.$$

Inserendo le condizioni iniziali siamo in grado di concludere che

$$\ddot{s}(0) = -\frac{5g}{6} \quad \text{e} \quad \ddot{\vartheta}(0) = -\frac{16g}{21R}\,.$$

Q4. *La struttura articolata riportata in Figura 3 è composta da quattro aste omogenee. Le aste AB e BC hanno ugual lunghezza 2ℓ e peso pari a p e $5p$, rispettivamente. L'asta ED ha lunghezza ℓ e peso $2p$, mentre AC ha lunghezza $2\ell\sqrt{2}$ e peso trascurabile. La struttura è vincolata a terra da una cerniera cilindrica in B e da un incastro scorrevole in D, mentre le articolazioni interne in A, C ed E sono tutte cerniere cilindriche. In condizioni di equilibrio, calcolare il modulo dello sforzo assiale nel punto Q di ED posto a distanza $\ell/2$ da E.*



Come osservazione preliminare notiamo che tutti i carichi e la reazione vincolare in D sono diretti lungo $\boldsymbol{e}_y$. Di conseguenza, è nulla la componente lungo $\boldsymbol{e}_x$ della reazione vincolare esplicata dalla cerniera in B: $\boldsymbol{\Phi}_B = \Phi_B \boldsymbol{e}_y$. A questo punto, spezziamo il sistema in E e consideriamo l'equilibrio del triangolo articolato ABC. Su di esso, oltre ai pesi di AB e BC ed alla reazione in B agisce una reazione vincolare dovuta alla soppressione della cerniera in E. Ripetendo gli argomenti addotti per determinare la direzione di $\boldsymbol{\Phi}_B$, concludiamo che anche la reazione $\boldsymbol{\Phi}_E$ dovuta alla cerniera in E è del tipo $\boldsymbol{\Phi}_E = \Phi_E \boldsymbol{e}_y$. L'equilibrio dei momenti per ABC rispetto a B impone

$$\Phi_E \ell - 5p\ell = 0$$

e dunque $\boldsymbol{\Phi}_E = 5p\boldsymbol{e}_y$. Passando all'asta ED, nell'estremo E agisce una reazione $-\boldsymbol{\Phi}_E = -5p\boldsymbol{e}_y$. Spezzando ED in Q ed imponendo l'equilibrio delle forze al trato EQ ricaviamo

$$T_{\|}\boldsymbol{e}_y - 5p\boldsymbol{e}_y - p\boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{0}\,,$$

dove l'ultimo termine rappresenta il peso del tratto EQ, pari a metà di quello dell'intera asta ED. In conclusione,

$$T_{\|} = 6p\,.$$