Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Esame di Meccanica Razionale
Appello del 3 Febbraio 2005
Soluzioni (Parte II)

Q1. *T*rovare la torsione τ della curva

$$p(t) - O = 2(t^2 + t)\boldsymbol{e}_x + \sin\frac{t}{2}\boldsymbol{e}_y + (1 - 3\cos t)\boldsymbol{e}_z$$

nel punto corrispondente a $t = 0$.

La torsione τ di una curva si calcola ricorrendo alla formula

$$\tau = -\frac{p' \wedge p'' \cdot p'''}{|p' \wedge p''|^2}$$

dove gli apici indicano derivazioni rispetto al parametro t. Svolgendo queste derivate abbiamo

$$p'(t) = 2(1 + 2t)\boldsymbol{e}_x + \frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}\boldsymbol{e}_y + 3\sin t\boldsymbol{e}_z\,,$$

$$p''(t) = 4\boldsymbol{e}_x - \frac{1}{4}\sin\frac{t}{2}\boldsymbol{e}_y + 3\cos t\boldsymbol{e}_z\,,$$

e

$$p'''(t) = -\frac{1}{8}\cos\frac{t}{2}\boldsymbol{e}_y - 3\sin t\boldsymbol{e}_z.$$

Per $t = 0$

$$p'(0) = 2\boldsymbol{e}_x + \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_y \qquad p''(0) = 4\boldsymbol{e}_x + 3\boldsymbol{e}_z \quad \text{e} \quad p'''(0) = -\frac{1}{8}\boldsymbol{e}_y$$

per cui, esplicitando i calcoli, si ottiene

$$\tau(0) = -\frac{3}{169}\,.$$

Q2. *In un atto di moto rigido, sia $\boldsymbol{v}_C$ la velocità del centro di massa C del sistema, $\boldsymbol{v}_O$ la velocità di un altro punto O ed $\boldsymbol{\omega}$ la velocità angolare. Sia inoltre assegnato un sistema di forze avente risultante $\boldsymbol{R}$ e momento risultante rispetto ad un punto P pari ad $\boldsymbol{M}_P$. Quale fra le seguenti espressioni per la potenza complessiva W del sistema di forze è sempre vera?*

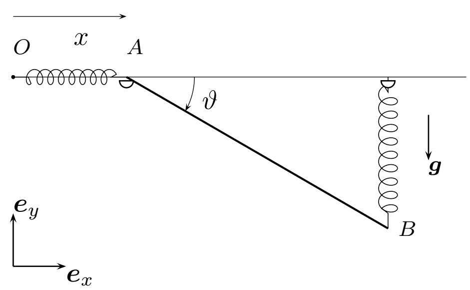
◯ $W = \boldsymbol{v}_O \cdot \boldsymbol{R} + \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{M}_O$ ◯ $W = \boldsymbol{v}_O \cdot \boldsymbol{R} + \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{M}_C$
◯ $W = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}_0^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbb{I}_O\boldsymbol{\omega}$ ◯ $W = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}_C \cdot \boldsymbol{v}_C + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbb{I}_C\boldsymbol{\omega}$

◯ $W = \boldsymbol{R} \wedge \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{M}_O \wedge \boldsymbol{\omega}$ ◯ $W = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{R} + \boldsymbol{v}_O \cdot \boldsymbol{M}_O$
◯ $W = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{R} \wedge \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{v}_C \cdot \boldsymbol{M}_O \wedge \omega$ ◯ Nessuna delle precedenti

La risposta esatta è

$$W = \boldsymbol{v}_O \cdot \boldsymbol{R} + \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{M}_O \,.$$

Q3. *In un piano verticale, un'asta AB omogenea di massa $5m$ e di lunghezza 2ℓ ha l'estremo A vincolato a scorrere lungo una guida orizzontale; una molla di costante elastica γk e lunghezza a riposo nulla attrae A verso un punto fisso O posto sulla guida. Una seconda molla, di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla attrae B verso la guida, ed è vincolata in modo da restare sempre verticale. Per quale valore di γ il prodotto fra le frequenze delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile con l'asta AB verticale vale $2\frac{g}{\ell}$? ($mg = k\ell$)*



Si possono scegliere le coordinate lagrangiane x e ϑ indicate in figura. Se G è il centro di massa di AB, l'energia cinetica dell'asta è

$$T = \frac{5m}{2} v_G^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathrm{I\!I}_G \boldsymbol{\omega} \,.$$

La velocità di G si ottiene derivando rispetto al tempo il vettore posizione riferito all'origine O

$$G - O = (x + \ell \cos\vartheta)\boldsymbol{e}_x - \ell \sin\vartheta \boldsymbol{e}_y$$

ottenendo

$$\boldsymbol{v}_G = (\dot{x} - \ell\dot{\vartheta}\sin\vartheta)\boldsymbol{e}_x - \ell\dot{\vartheta}\cos\vartheta \boldsymbol{e}_y$$

da cui segue anche

$$v_G^2 = \dot{x}^2 + \ell^2\dot{\vartheta}^2 - 2\ell\dot{x}\dot{\vartheta}\sin\vartheta \,.$$

Poiché inoltre la velocità angolare dell'asta è $\boldsymbol{\omega} = -\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z$ ed $\boldsymbol{e}_z$ è direzione centrale di inerzia per l'asta, con l'ausilio della tabella dei tensori centrali di inerzia possiamo scrivere

$$T = \frac{5m}{2}\dot{x}^2 + \frac{10m}{3}\ell^2\dot{\vartheta}^2 - 5m\ell\dot{x}\dot{\vartheta}\sin\vartheta\,.$$

Quanto all'energia potenziale, se si tiene presente che $k = mg/\ell$ abbiamo

$$V = -5mg\ell\sin\vartheta + \frac{\gamma mg}{2\ell}x^2 + 2mg\ell\sin^2\vartheta$$

da cui si vede che le configurazioni di equilibrio possibili risolvono il sistema

$$\begin{cases} V_x = \frac{\gamma mg}{\ell}x = 0 \\ V_\vartheta = mg\ell\cos\vartheta(-5 + 4\sin\vartheta) = 0\,. \end{cases}$$

Le sole soluzioni accettabili sono $x = 0$ e $\vartheta = \pm\frac{\pi}{2}$. Per discutere la stabilità occorre calcolare le derivate seconde di V

$$\begin{cases} V_{xx} = \frac{\gamma mg}{\ell} \\ V_{x\vartheta} = 0 \\ V_{\vartheta\vartheta} = -mg\ell\sin\vartheta(-5 + 4\sin\vartheta) + 2mg\ell\cos^2\vartheta \end{cases}$$

da cui si vede come solo quando $\vartheta = \pi/2$ entrambi gli autovalori della forma hessiana associata a V sono positivi e dunque la configurazione di equilibrio è stabile. Per proseguire nell'analisi dei modi normali scriviamo le espressioni delle forme quadratiche A e B associate all'energia cinetica ed all'energia potenziale

$$A = \begin{pmatrix} 5m & -5m\ell \\ -5m\ell & \frac{20}{3}m\ell^2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \gamma mg/\ell & 0 \\ 0 & mg\ell \end{pmatrix}$$

e scrivere l'equazione $\det(\lambda A - B) = 0$ che è data da

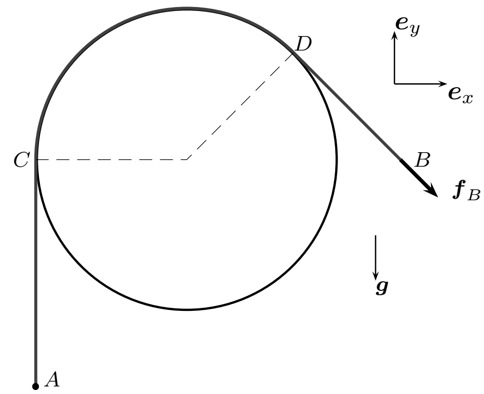
$$\frac{25}{3}\ell^2\lambda^2 - \frac{35}{3}g\ell\lambda + \gamma g^2 = 0\,.$$

Il quesito proposto è equivalente a richiedere che il prodotto delle radici di questa equazione sia $4g^2/\ell^2$, cioè

$$\frac{3\gamma}{25} = 4$$

da cui si ottiene $\gamma = 100/3$.

Q4. *In un piano verticale, un filo AB di peso trascurabile e lunghezza ℓ opportuna è appoggiato lungo un profilo circolare scabro di raggio R; il filo è tenuto teso grazie all'azione di un peso mg in A e di una forza $\boldsymbol{f}_B = 3mg\boldsymbol{n}$ in B, diretta secondo il versore $\boldsymbol{n} = \cos\frac{\pi}{3}\boldsymbol{e}_x - \sin\frac{\pi}{3}\boldsymbol{e}_y$ (Figura 2). Qual è il minimo coefficiente d'attrito statico μ tra filo e profilo compatibile con l'equilibrio nelle condizioni descritte?*



Poiché il filo ha peso trascurabile, la tensione in B coincide con il valore del peso applicato in A –$\tau_C = mg$– mentre la tensione in D è pari al modulo di $\boldsymbol{f}_B$: $\tau_D = 3mg$. Consideriamo il tratto di filo CD di lunghezza $\ell = R[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}] = \frac{5\pi R}{6}$, appoggiato al supporto. Poiché non vi sono forze attive distribuite lungo il filo, possiamo scrivere le equazioni di equilibrio indefinite nella forma

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s} + \phi_t = 0 \\ \frac{\tau}{R} + \phi_n = 0 \end{cases}$$

grazie a cui possiamo riscrivere la condizione di equilibrio di Coulomb e Morin $|\phi_t| \leq \mu|\phi_n|$ come

$$\left|\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s}\right| \leq \frac{\mu\tau}{R}$$

da cui segue

$$\left|\frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s}\right| \leq \frac{\mu}{R}$$

che a sua volta, integrata da C a D, fornisce la condizione $\ln\ 3 \leq \frac{5\pi\mu}{6}$, ovvero

$$\mu \geq \frac{6\ln\ 3}{5\pi}\,.$$