Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Esame di Meccanica Razionale
Appello del 4 aprile 2002
Soluzioni

D1. *Si consideri il seguente sistema di vettori applicati:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{e}_x - 3\boldsymbol{e}_y - \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_z & \textit{applicato in } P_1 - O \equiv (1,0,0), \\ \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y & \textit{applicato in } P_2 - O \equiv (0,2,1), \\ \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_z & \textit{applicato in } P_3 - O \equiv (\beta,2,0). \end{cases}$$

Trovare per quale valore di β il trinomio invariante del sistema è nullo.

Il sistema di vettori proposto ha risultante

$$\mathbf{R} = 2\boldsymbol{e}_x - 3\boldsymbol{e}_y - \frac{3}{2}\boldsymbol{e}_z$$

e momento rispetto all'origine O dato da

$$\mathbf{M}_O = -\boldsymbol{e}_x + (\frac{3}{2} + \beta)\boldsymbol{e}_y + (\beta - 5)\boldsymbol{e}_z.$$

Il trinomio invariante $\mathcal{I} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O$ è allora

$$\mathcal{I} = -\frac{9}{2}\beta + 1$$

e si annulla per $\beta = \frac{2}{9}$.

D2. *Trovare la curvatura della curva di equazione parametrica*

$$P(t) - O = (\mathrm{e}^t - 1)^2\boldsymbol{e}_x + 4\mathrm{e}^{-2t}\boldsymbol{e}_y - \mathrm{e}^{-t}\boldsymbol{e}_z$$

nel punto in cui $t = 0$.

Derivando due volte rispetto al parametro t otteniamo

$$P'(t) = 2(\mathrm{e}^t - 1)\mathrm{e}^t\boldsymbol{e}_x - 8\mathrm{e}^{-2t}\boldsymbol{e}_y + \mathrm{e}^{-t}\boldsymbol{e}_z$$

e

$$P''(t) = 2[\mathrm{e}^{2t} + (\mathrm{e}^t - 1)\mathrm{e}^t]\boldsymbol{e}_x + 16\mathrm{e}^{-2t}\boldsymbol{e}_y - \mathrm{e}^{-t}\boldsymbol{e}_z$$

cosicché in $t = 0$ è

$$P'(0) = -8\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z, \qquad P''(0) = 2\boldsymbol{e}_x + 16\boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_z :$$

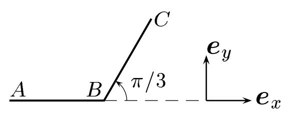
possiamo allora concludere che la curvatura è

$$c(0) = \frac{|P'(0) \wedge P''(0)|}{|P'(0)|^3} = \frac{18}{65\sqrt{65}}.$$

D3. *Se E rappresenta un'energia e Ψ il modulo del momento di una forza, quali sono le dimensioni del rapporto E/Ψ?*

L'energia ha le stesse dimensioni del lavoro che si ottiene dal prodotto scalare di una forza ed uno spostamento: $[E] = [FL]$. D'altra parte il momento di una forza si ottiene facendo il prodotto vettoriale di una forza ed un vettore posizione, per cui il suo modulo ha ancora dimensioni $[\Psi] = [FL]$. In definitiva, il rapporto E/Ψ è un numero puro.

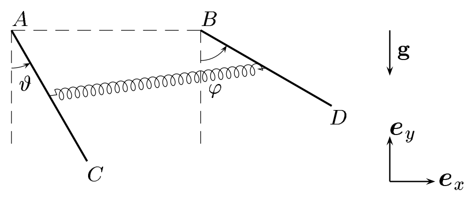
D4. *Due aste omogenee AB e BC di ugual lunghezza 3ℓ e ugual massa m sono saldate come in Figura. Trovare il momento di inerzia rispetto all'asse diretto lungo $\boldsymbol{e}_z$ e passante per il punto B.*



Dal teorema di Huygens-Steiner segue che ogni asta ha momento di inerzia $3m\ell^2$ rispetto all'asse passante per B e diretto come $\boldsymbol{e}_z$. Sommando i contributi ricaviamo che il momento di inerzia complessivo è

$$I_B^z = 6m\ell^2.$$

E1. *In un piano verticale, due aste omogenee di ugual lunghezza ℓ hanno gli estremi fissati in due punti A e B posti sulla stessa orizzontale, a distanza $\ell/2$; AC ha massa m mentre BD ha massa $m/2$. I centri di massa delle aste sono collegati da una molla di lunghezza a riposo nulla e costante elastica $4k$. Introdotte le coordinate lagrangiane ϑ e φ indicate in Figura, qual è l'equazione di* Lagrange *relativa alla variabile φ?*



Le aste che compongono il sistema ruotano attorno ad assi fissi diretti come $\boldsymbol{e}_z$ e passanti per A e B, per cui l'energia cinetica complessiva è

$$T = \frac{m\ell^2}{6}(\dot{\vartheta}^2 + \frac{\dot{\varphi}^2}{2}).$$

Se indichiamo con G_1 e G_2 i centri di massa di AC e BD, rispettivamente, l'energia potenziale V è

$$V = -\frac{mg\ell}{2}\cos\vartheta - \frac{mg\ell}{4}\cos\varphi + 2k|G_1 - G_2|^2,$$

dove è stata assunto come livello di riferimento per l'energia gravitazionale quello di AB. Rispetto al punto A, le coordinate di G_1 e G_2 sono

$$G_1 - A = (\frac{\ell}{2}\sin\vartheta, -\frac{\ell}{2}\cos\vartheta), \quad G_2 - A = (\frac{\ell}{2}(1+\sin\varphi), -\frac{\ell}{2}\cos\varphi)$$

da cui otteniamo

$$|G_1 - G_2|^2 = \frac{\ell^2}{2}[\frac{3}{2} + \sin\varphi - \sin\vartheta - \cos(\vartheta - \varphi)].$$

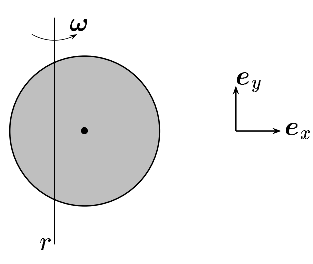
La lagrangiana $L = T - V$ del sistema risulta pertanto

$$\begin{aligned} L = {} & \tfrac{m\ell^2}{6}(\dot{\vartheta}^2 + \tfrac{\dot{\varphi}^2}{2}) + \tfrac{mg\ell}{2}\cos\vartheta + \tfrac{mg\ell}{4}\cos\varphi \\ & -k\ell^2[\tfrac{3}{2} + \sin\varphi - \sin\vartheta - \cos(\vartheta - \varphi)] \end{aligned}$$

e l'equazione di Lagrange relativa alla variabile φ è

$$\frac{m\ell^2}{6}\ddot{\varphi} = -\frac{mg\ell}{4}\sin\varphi - k\ell^2[\cos\varphi - \sin(\vartheta - \varphi)]$$

E2. *Un disco omogeneo di raggio R e massa $3m$ è vincolato ad un asse verticale r posto a distanza $2R/3$ dal suo centro. Il piano contenente il disco ruota con velocità angolare costante $\boldsymbol{\omega} = 4\omega\boldsymbol{e}_y$ attorno ad r. Trovare l'energia potenziale della forza centrifuga, a meno di una costante additiva.*



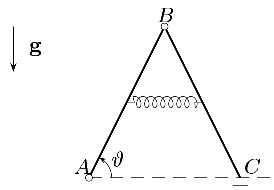
L'energia potenziale della forza centrifuga è $V = -8I_\omega\omega^2$, dove abbiamo inserito il valore del modulo della velocità angolare di rotazione del piano. I_ω è il momento di inerzia del disco rispetto all'asse r e si ricava facendo ricorso al teorema di HUYGENS-STEINER:

$$I_\omega = \frac{3}{4}mR^2 + \frac{4}{3}mR^2 = \frac{25}{12}mR^2.$$

Pertanto,

$$V = -\frac{50}{3}m\omega^2 R^2.$$

E3. *In un piano verticale due aste omogenee di lunghezza ℓ e massa $3m$ sono incernierate nell'estremo comune B. L'asta AB ha l'estremo A incernierato ad un punto fisso, mentre l'estremo C di BC scorre senza attrito su una guida orizzontale. Le aste hanno i punti medi collegati da una molla di costante elastica $k/4$ e lunghezza a riposo nulla. Per quali valori del rapporto $\gamma := \frac{mg}{k\ell}$ esistono configurazioni di equilibrio diverse da $\vartheta = \frac{\pi}{2}$?*



Le sole sollecitazioni attive presenti sono la forza peso e quella elastica, entrambe conservative. Per trovare le posizioni di equilibrio in funzione dell'angolo ϑ indicato in figura scriviamo l'energia potenziale

$$V = 3mg\ell \sin\vartheta - \frac{k\ell^2}{8}\cos^2\vartheta$$

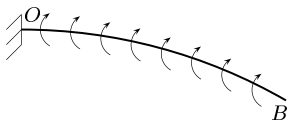
e uguagliamo a zero la sua derivata prima rispetto a ϑ

$$\ell \cos\vartheta[3mg - \frac{k\ell}{4}\sin\vartheta] = 0$$

A parte la soluzione $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ che è sempre presente, l'ulteriore soluzione $\sin\vartheta = 12\gamma$ esiste a patto che sia

$$\gamma \leq \frac{1}{12}.$$

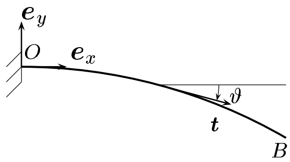
E4. *Una verga euleriana rettilinea di lunghezza ℓ è caricata da una distribuzione costante di coppie con densità $-p\boldsymbol{e}_z$. L'estremo O è incastrato, mentre l'estremo B è libero. Se la rigidezza flessionale della verga (coefficiente di proporzionalità tra curvatura e momento flettente) è $A = \frac{p\ell^2}{4}$, qual è il profilo di equilibrio della verga, nell'ipotesi di piccole deflessioni dalla configurazione indeformata?*



Sia s l'ascissa curvilinea della verga, misurata partendo da O. Il versore tangente $\boldsymbol{t}$ si esprime come

$$\boldsymbol{t} = \cos\vartheta(s)\boldsymbol{e}_x - \sin\vartheta(s)\boldsymbol{e}_y = x'(s)\boldsymbol{e}_x + y'(s)\boldsymbol{e}_y, \tag{1}$$

dove le coordinate (x, y) sono riferite al punto O, come indicato nella figura seguente.



Le equazioni di equilibrio per la verga sono

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Phi}' + \mathbf{f} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\Gamma}' + \boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{\Phi} + \mathbf{g} = \mathbf{0} \end{cases}$$

dove $\boldsymbol{\Phi}$ è lo sforzo interno all'asta e Γ il momento flettente, mentre $\mathbf{f}$ è la densità di carico distribuita e $\mathbf{g}$ la densità di coppia distribuita. L'ipotesi di verga euleriana si traduce nella relazione

$$\boldsymbol{\Gamma} = Ac\boldsymbol{b} \tag{2}$$

che lega il momento flettente alla curvatura $c = \vartheta'$ della verga. Nel caso in esame $\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{e}_z$, $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{g} = -p\boldsymbol{e}_z$ e dunque le equazioni di equilibrio diventano

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Phi}' = \mathbf{0} \\ -A\vartheta''\boldsymbol{e}_z + \boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{\Phi} - p\boldsymbol{e}_z = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Dalla prima equazione segue $\Phi(s) = \mathbf{k} = \mathbf{0}$, visto che l'estremo B non è soggetto a carichi o coppie concentrate. Sostituendo nella seconda equazione otteniamo

$$\vartheta'' = -\frac{4}{\ell^2}$$

che, integrata due volte, fornisce

$$\vartheta(s) = -\frac{2}{\ell^2}s^2 + c_1 s + c_2$$

con c_1 e c_2 costanti di integrazione. Per determinarle, notiamo che in O vi è un incastro completo e dunque $\vartheta(0) = 0$, mentre in B l'estremo è libero e dunque $\mathbf{\Gamma}(\ell) = \mathbf{0}$ da cui segue, in virtù di (2), $\vartheta'(\ell) = 0$. Imponendo queste condizioni al contorno otteniamo $c_1 = \frac{4}{\ell}$, $c_2 = 0$ e dunque

$$\vartheta(s) = -\frac{4s}{\ell^2}(\frac{s}{2} - \ell).$$

Per risalire al profilo di equilibrio ricorriamo all'ipotesi di piccole deflessioni dalla configurazione indeformata imponendo $|\vartheta(s)| \ll 1$. Riscrivendo (1) nell'approssimazione adottata, abbiamo $x'(s) = 1$ e $y'(s) = -\vartheta(s)$. In particolare, integrando $x'(s) = 1$ otteniamo $x = s$: possiamo cioè confondere l'ascissa curvilinea s con la variabile x. Abbiamo pertanto

$$y'(s) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \vartheta(s) = \vartheta(x) = -\frac{4x}{\ell^2}(\frac{x}{2} - \ell)$$

e, integrando,

$$y(x) = -\frac{4}{\ell^2}(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2\ell}{2}) + c_3.$$

Di nuovo, poiché l'estremo O è incastrato, $y(0) = 0$ e dunque

$$y(x) = \frac{2x^2}{3\ell^2}(x - 3\ell).$$