Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Esame di Meccanica Razionale
Appello del 4 settembre 2003
Soluzioni

1. *Il tensore* $\boldsymbol{T}$ *agisce sulla base ortonormale* $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ *nel modo seguente*

$$\begin{cases} \boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_3 = 2\boldsymbol{e}_1. \end{cases}$$

Trovare la rappresentazione di $\boldsymbol{T}$ *sulla base* $\{\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j\}$.

La matrice associata a $\boldsymbol{T}$ rispetto alla base $\{\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j\}$ ha elementi

$$L_{ij} := \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_j$$

e la rappresentazione associata di $\boldsymbol{T}$ è

$$\boldsymbol{T} = \sum_{i,j=1}^{3} L_{ij}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \, .$$

Dal testo ricaviamo

$$L_{11} = L_{31} = L_{22} = L_{23} = L_{33} = 0$$

e

$$L_{21} = L_{32} = 1 \; , L_{12} = -1 \; , \text{and } L_{13} = 2$$

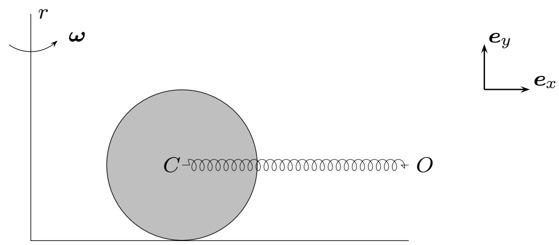
e dunque la rappresentazione cercata è

$$\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2) + \boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_3 \, .$$

2. *In un piano verticale, un disco omogeneo di massa* $3m$ *e raggio* R *può rotolare senza strisciare su una guida orizzontale ed ha il centro* C *attratto con forza elastica di costante* $2k$ *verso un punto* O *posto alla stessa quota di* C *e a distanza* $4R$ *dalla retta verticale* r. *Il piano in cui il disco può muoversi ruota con velocità angolare costante* $\boldsymbol{\omega} = \alpha\sqrt{\frac{k}{m}}\boldsymbol{e}_y$ *attorno ad* r. *Trovare tutti e soli i valori* α *tali che esistano posizioni di equilibrio stabile per il sistema, rispetto ad un osservatore rotante con il piano.*

Se poniamo $O - C = x\boldsymbol{e}_x$, l'energia potenziale diventa

$$V = kx^2 - \frac{k}{2m} I_\omega \alpha^2 \, ,$$



dove il primo addendo si riferisce all'energia elastica, il secondo all'energia associata alle forze centrifughe. La quantità I_ω che figura nell'espressione di V è il momento di inerzia del disco rispetto all'asse di rotazione r. Per calcolarlo basta applicare il teorema di Huygens-Steiner,

$$I_\omega = \frac{3m}{4}R^2 + 3m(4R - x)^2$$

dove il primo addendo è il momento centrale di inerzia rispetto all'asse parallelo ad r. Le eventuali posizioni di equilibrio sono le radici di $V' = 0$, cioè

$$x = \frac{12\alpha^2 R}{3\alpha^2 - 2}$$

e la stabilità si studia attraverso il segno della derivata seconda,

$$V'' = 2 - 3\alpha^2 > 0$$

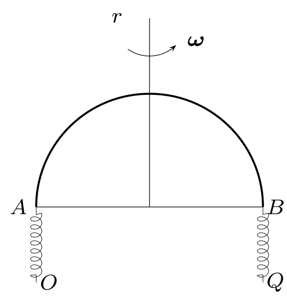
che impone la restrizione $\alpha \in (-\sqrt{\frac{2}{3}})$. Gli estremi dell'intervallo sono esclusi in quanto non esiste alcuna configurazione di equilibrio in quel caso.

3. *Un sistema meccanico ha energia cinetica T. Quando l'equazione $\frac{dT}{dt} = W$ è corretta?*

◯ Quando W è la potenza delle forze esterne al sistema.
◯ Quando W è la potenza di tutte le forze agenti sul sistema.
◯ Quando W è la potenza delle forze reattive.
◯ Quando W è la potenza delle forze interne al sistema.
◯ Quando W è la potenza delle forze attive agenti sul sistema.

Il teorema dell'energia cinetica afferma che la derivata dell'energia cinetica rispetto al tempo è pari alla potenza di tutte le forze agenti sul sistema. Per una discussione più approfondita di questo punto si può consultare l'esercizio di *Esercizi e complementi*.

4. *Un filo omogeneo AB di lunghezza πR è appoggiato su un semidisco di raggio R, privo di attrito, che ruota attorno al suo asse di simmetria r con velocità* *angolare costante $\boldsymbol{\omega} = \sqrt{\frac{k}{2m}}\boldsymbol{e}_y$. Gli estremi A e B del filo sono attratti da due molle di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla verso due punti O e Q del piano rotante distanti γR da A e B, rispettivamente. Se la densità di massa del filo è $4\frac{m}{R}$ e la gravità è trascurabile, trovare il minimo valore di γ compatibile con l'equilibrio del filo rispetto al semidisco.*



Indichiamo con ϑ l'angolo formato con la direzione orizzontale dal raggio del generico punto del filo. Nel sistema rotante, la sola forza attiva distribuita lungo il filo è la forza centrifuga; trattandosi di una forza conservativa e non essendoci attrito con il supporto la tensione τ si ottiene grazie alla formula $\tau = v + c$, dove c è una costante e v è l'energia potenziale specifica della forza centrifuga pari a $v = -\frac{1}{2}\varrho\omega^2 d^2$, dove ϱ è la densità di massa del filo in P e $d = R\cos\vartheta$. Pertanto, usando i dati del problema

$$\tau = c - kR\cos^2\vartheta\,.$$

Per determinare la costante c imponiamo che la tensione in Q, dove $\vartheta = 0$ sia pari alla forza elastica concentrata in Q, $\tau(0) = \gamma kR$. Sostituendo $\vartheta = 0$ nell'espressione di τ ricaviamo

$$c = kR(\gamma + 1)$$

per cui

$$\tau = kR[\gamma + 1 - \cos^2\vartheta]\,.$$

La reazione vincolare specifica lungo la normale principale del filo è

$$\Phi_n = -(f_n + \frac{\tau}{R})\,,$$

come si ricava dalle equazioni di equilibrio indefinite di equilibrio per i fili. Il filo è a contatto con il supporto finché $\Phi_n \le 0$, cioè finché è $f_n + \frac{\tau}{R} \ge 0$. Poiché la componente della forza attiva specifica si riduce alla componente della forza centrifuga pari a $f_n = -2k\cos^2\vartheta$, abbiamo come condizione di contatto

$$kR[\gamma + 1 - 3\cos^2\vartheta] \ge 0 \qquad \forall\vartheta \in [0,\pi]\,,$$

che è verificata per

$$\gamma \ge 2\,.$$