Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Esame di Meccanica Razionale
Appello del 4 settembre 2003
Soluzioni: parte II

Q1. *Si consideri il seguente sistema di vettori applicati:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = 2\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z & \text{applicato in } P_1 - O \equiv (1, 0, -1), \\ \boldsymbol{v}_2 = -\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y + 3\boldsymbol{e}_z & \text{applicato in } P_2 - O \equiv (0, 2, 1), \\ \boldsymbol{v}_3 = -\boldsymbol{e}_y - 2\boldsymbol{e}_z & \text{applicato in } P_3 - O \equiv (-1, 1, \gamma). \end{cases}$$

Calcolare per quale valore di γ il trinomio invariante assume il valore 3

Il risultante del sistema è

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y + 2\boldsymbol{e}_z \,, \tag{1}$$

e il momento totale rispetto all'origine è, invece:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_O =& (\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_z) \wedge (2\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z) + \\ & (2\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z) \wedge (-\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y + 3\boldsymbol{e}_z) + \\ & (-\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y + \gamma\boldsymbol{e}_z) \wedge (-\boldsymbol{e}_y - 2\boldsymbol{e}_z) \\ =& (5 + \gamma)\boldsymbol{e}_x - 6\boldsymbol{e}_y + 5\boldsymbol{e}_z \,. \end{aligned} \tag{2}$$

A questo punto, non resta che calcolare il trinomio invariante $\mathcal{I}$ ...

$$\mathcal{I} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{M}_O = (5 + \gamma) - 12 + 10 = 3 + \gamma \tag{3}$$

... e imporre $\mathcal{I} = 3$ per ottenere

$$\gamma = 0 \,. \tag{4}$$

Q2. *Una lamina omogenea piana di massa $2m$ viene ottenuta praticando in un disco omogeneo di raggio $3R$ un foro circolare di raggio R la cui circonferenza è tangente a quella del disco (Figura 1). Calcolare il momento di inerzia rispetto all'asse diretto lungo $\boldsymbol{e}_z$ e passante per il centro O del disco originario.*

(Nota: come precisato in aula, il compito richiesto va inteso come: "*Calcolare il momento di inerzia* della lamina *rispetto all'asse diretto lungo $\boldsymbol{e}_z$ e passante per il centro O del disco originario*".)

Come suggerito anche dal testo, conviene applicare il *principio della lacuna* per determinare il momento d'inerzia del disco asportato per creare il foro rispetto all'asse diretto lungo $\boldsymbol{e}_z$ e passante per O, e usare la formula di Steiner, notando che la distanza fra i due assi diretti come $\boldsymbol{e}_z$ e passanti, rispettivamente, per O e O' è $d = 3R - R = 2R$. Per fare ciò, la prima cosa che serve è la densità superficiale (σ) di massa della lamina.

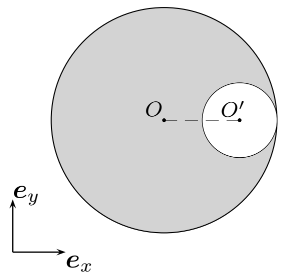

Fig. 1

$$\sigma = \frac{2m}{\pi(9-1)R^2} = \frac{m}{4\pi R^2}\,; \tag{5}$$

usando l'espressione del tensore d'inerzia per un disco omogeneo, è immediato ottenere il momento d'inerzia richiesto sottraendo a quello di un disco pieno di centro O e raggio $3R$ quello del disco asportato di centro O'. La massa di ciascuno di questi elementi verrà ricavata moltiplicando σ per l'area corrispondente; in breve si ha

$$I_z = \frac{1}{2}\sigma\pi 9R^2 \times 9R^2 - [\frac{1}{2}\sigma\pi R^2 \times R^2 + \sigma\pi R^2(3R-R)^2]\,, \tag{6}$$

ossia, sostituendo la (5) nella (6),

$$I_z = 9mR^2\,. \tag{7}$$

Q3. *La struttura rigida riportata in Figura 2 è posta in un piano verticale ed è composta da due aste: un'asta omogenea rettilinea di massa m e lunghezza $\sqrt{2}\ell$ avente l'estremo A incernierato a terra e l'altro estremo C incernierato a quello di una seconda asta di massa trascurabile curvata in un quarto di circonferenza di raggio ℓ; l'altro estremo B dell'asta ricurva è vincolato a terra mediante una cerniera posta alla stessa quota di A. Sulla cerniera C agisce una forza $\boldsymbol{f} = -2mg\boldsymbol{e}_y$. Determinare il valore assoluto M_f del momento flettente nel punto medio M dell'arco $\overset{\frown}{BC}$.*
(Nota: come ricavabile anche dalla figura, il testo va inteso come: *"l'altro estremo B dell'asta ricurva è vincolato a terra mediante una cerniera* posta a distanza 2ℓ da A e alla sua stessa quota", ovvero, l'asta AC è inclinata di 45° rispetto all'orizzontale.)

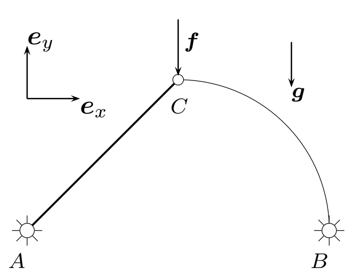

Fig. 2

L'asta ricurva BC è scarica e sollecitata agli estremi solo da forze e non da coppie, per l'azione dei vincoli (cerniere) negli estremi B e C e delle forze attive, ossia è una *biella*, come viene spesso chiamata. Le reazioni vincolari agli estremi, pertanto, devono essere dirette come la congiungente i punti B e C stessi; possiamo quindi esprimere la reazione $\boldsymbol{\Phi}_B$ che la cerniera esercita sull'asta tramite una sola incognita scalare Φ:

$$\boldsymbol{\Phi}_B = \Phi \boldsymbol{e}\,, \tag{8}$$

dove $\boldsymbol{e}$ è il versore diretto come $C - B$: $\boldsymbol{e} := \frac{C-B}{|C-B|} = \frac{1}{2}(-\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y)$.

Se scriviamo la seconda equazione cardinale della statica per il sistema scegliendo A come polo, otteniamo che l'unica sua proiezione non nulla banalmente (ossia, quella lungo $\boldsymbol{e}_z$) ci fornisce un'equazione per determinare Φ:

$$\boldsymbol{M}_A \cdot \boldsymbol{e}_z = -mg\frac{\sqrt{2}\ell}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - 2mg\sqrt{2}\ell\frac{\sqrt{2}}{2} + \Phi\sqrt{2}\ell = 0\,, \tag{9}$$

dove abbiamo usato il fatto che l'asta AC è omogenea, e quindi il suo peso complessivo è applicabile nel suo punto medio, e che, per le condizioni geometriche della struttura, $\boldsymbol{\Phi}$ è diretto ortogonalmente ad essa. Dalla (9) ricaviamo immediatamente,dopo le opportune semplificazioni, che

$$\Phi = \frac{5}{4}\sqrt{2}mg\,. \tag{10}$$

Se immaginiamo ora di spezzare l'asta BC nel suo punto medio M, in esso dovranno comparire le azioni interne, ivi compreso il momento flettente M_f cercato; tenendo la porzione $\overset{\frown}{MB}$ e calcolando i momenti rispetto a M per non fare intervenire le azioni incognite N assiale e T di taglio, possiamo scrivere l'equazione che permette di risolvere l'esercizio; anche in questo caso, l'unica proiezione non banale della seconda equazione cardinale è quella lungo $\boldsymbol{e}_z$: indicando con M_f il momento flettente, contato come positivo se antiorario, abbiamo:

$$M_f = \Phi b = \frac{5}{4}(\sqrt{2} - 1)mg\ell\,, \tag{11}$$

dove abbiamo usato il fatto che il braccio B del vettore $\boldsymbol{\Phi}_A$ è la freccia dell'arco $\overset{\frown}{BC}$:

$$b = \ell - \ell\frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Q4. *In un piano verticale, una lamina quadrata omogenea di massa αm e lato ℓ ha un vertice O incernierato su un pianale AB orizzontale ed è appoggiata senza attrito lungo tutto un lato su questo pianale, in modo che il punto O si trovi a distanza 2ℓ dall'estremo A del pianale. Il vertice P della lamina sulla verticale per O è attratto verso A da una molla di costante elastica $\gamma\frac{mg}{\ell}$ e lunghezza a riposo nulla (Figura 3). Detta x l'ascissa di A rispetto ad un riferimento fisso, a partire da un dato istante, il pianale inizia a muoversi con legge oraria $x(t) = x_0 \sin\beta\omega t$, con $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$. Qual è il valore limite di x_0 compatibile con il contatto fra la lamina ed il pianale durante tutto il moto?*

La condizione in base alla quale si ha il contatto fra la lamina ed il pianale durante tutto il moto può essere riassunta dicendo che la reazione vincolare complessiva dell'appoggio

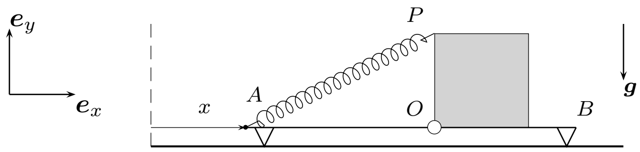

Fig. 3

fornisce un sistema di forze che ha un momento $\boldsymbol{\Psi} = \Psi \boldsymbol{e}_z$ rispetto al punto O, con $\Psi \geq 0$. Per scrivere un'equazione che permetta di ricavare l'incognita Ψ possiamo metterci nel sistema di riferimento non inerziale solidale con il pianale, che trasla rispetto al riferimento fisso con accelerazione $\boldsymbol{a} = \ddot{x}\boldsymbol{e}_x$: al centro di massa della lamina risulterà applicata la forza apparente di trascinamento $\boldsymbol{F}_a = -10m\ddot{x}\boldsymbol{e}_x$, da aggiungere alle forze reali attive e reattive.

Scriviamo la seconda equazione cardinale della statica scegliendo O come polo: la reazione vincolare dovuta alla cerniera, che non è nota, non dà contributo. Otteniamo pertanto, ponendo

$$k := \frac{mg}{\ell} \; : \tag{12}$$

$$M_O := \boldsymbol{M}_O \cdot \boldsymbol{e}_z = \psi + 2k\ell^2 - 5mgl + 5m\ddot{x}\ell = 0\,; \tag{13}$$

la condizione di appoggio si esprime, dunque, come

$$\begin{aligned} \psi &= 5mgl - 2k\ell^2 - 5m\ddot{x}\ell \\ &= 5mgl - 2k\ell^2 + 5m\omega^2 x_0 \sin\omega t \\ &= 3mgl + 5mgx_0 \sin\omega t \geq 0 \qquad \forall t \geq 0\,, \end{aligned} \tag{14}$$

dove abbiamo usato la (12) e i dati forniti nel testo. L'ultima disuguaglianza della (14) è soddisfatta per ogni istante se lo è in corrispondenza del minimo dell'espressione di sinistra, che si ha per il minimo della funzione seno, ossia -1; otteniamo perciò:

$$3mgl - 5mgx_0 \geq 0\,, \tag{15}$$

che permette di ricavare il valore massimo di x_0 compatibile con l'appoggio, ossia:

$$x_0 = \frac{3}{5}\ell\,. \tag{16}$$