UNIVERSITÀ DI PAVIA
FACOLTÀ DI INGEGNERIA
Esame di Meccanica Razionale
5 Settembre 2002

Il ***candidato*** scriva nelle caselle sottostanti i propri Cognome, Nome e Matricola.

COGNOME	
NOME	
MATRICOLA	

La ***prova*** consta di **4** Domande e **4** Esercizi e durerà **4** ***ore***. ***Non è permesso*** consultare testi od appunti, al di fuori di quelli distribuiti dalla Commissione.
La ***risposta*** a ciascuno di essi va scelta *esclusivamente* tra quelle già date nel testo, annerendo *un solo* circoletto ◯. Una sola è la risposta corretta. Qualora sia data più di una risposta allo stesso quesito, questa sarà considerata errata, anche se una delle risposte date è corretta.
I ***punteggi*** per ciascun quesito sono dichiarati in *trentesimi* sul testo, nel seguente formato

{E,NE,A}

dove **E** è il punteggio assegnato in caso di risposta *Esatta*, **NE** quello in caso di risposta *Non Esatta* e **A** quello in caso di risposta *Assente*. L'esito finale della prova è determinato dalla somma *algebrica* dei punteggi parziali. Spazio riservato alla Commissione. *Non scrivere nelle caselle sottostanti!*

ESITO	

DOMANDE

D1. *Una lamina quadrata omogenea $\mathcal{Q}$ di massa $2m$ e lato di lunghezza ℓ viene divisa in due lungo una diagonale ed i triangoli così ottenuti vengono disposti in modo da formare un triangolo $\mathcal{T}$ (Figura 1). Detti $I_O(\mathcal{Q})$ ed $I_O(\mathcal{T})$ i rispettivi momenti di inerzia rispetto ad un asse passante per O e diretto lungo $\mathbf{e}_z$, quanto vale la differenza $\Delta := I_O(\mathcal{Q}) - I_O(\mathcal{T})$?*

Soluzione
◯ $m\ell^2$ ◯ $12m\ell^2$ ◯ $\frac{4}{3}m\ell^2$ ◯ $3m\ell^2$ ◯ $\frac{2}{3}m\ell^2$ ◯ $4m\ell^2$ ◯ $6m\ell^2$ ◯ $16m\ell^2$

D2. *In un piano, un'asta omogenea di lunghezza ℓ e massa $2m$ ha il centro vincolato a muoversi lungo una retta r. Sull'asta scorre un punto materiale P di massa $2m$. Calcolare l'energia cinetica del sistema in funzione delle coordinate lagrangiane x, s e ϑ indicate in Figura 2.*

{5,-1,0}

Risposta
◯ $m[2\dot{x}^2+\frac{1}{2}(\frac{1}{12}\ell^2+3s^2)\dot{\vartheta}^2+\frac{3}{2}\dot{s}^2+3\dot{x}(\dot{s}\cos\vartheta-s\dot{\vartheta}\sin\vartheta)]$ ◯ $m[\dot{x}^2+\frac{1}{2}(\frac{1}{12}\ell^2+s^2)\dot{\vartheta}^2+\frac{1}{2}\dot{s}^2+\dot{x}(\dot{s}\cos\vartheta-s\dot{\vartheta}\sin\vartheta)]$
◯ $m[\frac{5}{2}\dot{x}^2+\frac{1}{2}(\frac{1}{4}\ell^2+2s^2)\dot{\vartheta}^2+\dot{s}^2+2\dot{x}(\dot{s}\cos\vartheta-s\dot{\vartheta}\sin\vartheta)]$ ◯ $m[\frac{3}{2}\dot{x}^2+\frac{1}{2}(\frac{1}{6}\ell^2+s^2)\dot{\vartheta}^2+\frac{1}{2}\dot{s}^2+\dot{x}(\dot{s}\cos\vartheta-s\dot{\vartheta}\sin\vartheta)]$

◯ $m[\frac{3}{2}\dot{x}^2+\frac{1}{2}(\frac{1}{12}\ell^2+s^2)\dot{\vartheta}^2+\dot{s}^2+2\dot{x}(\dot{s}\cos\vartheta-s\dot{\vartheta}\sin\vartheta)]$ ◯ $m[2\dot{x}^2+\frac{1}{2}(\frac{1}{4}\ell^2+s^2)\dot{\vartheta}^2+\frac{1}{2}\dot{s}^2+\dot{x}(\dot{s}\cos\vartheta-s\dot{\vartheta}\sin\vartheta)]$
◯ $m[\frac{5}{2}\dot{x}^2+\frac{1}{2}(\frac{1}{6}\ell^2+3s^2)\dot{\vartheta}^2+\frac{3}{2}\dot{s}^2+3\dot{x}(\dot{s}\cos\vartheta-s\dot{\vartheta}\sin\vartheta)]$ ◯ $m[2\dot{x}^2+\frac{1}{2}(\frac{1}{6}\ell^2+2s^2)\dot{\vartheta}^2+\dot{s}^2+2\dot{x}(\dot{s}\cos\vartheta-s\dot{\vartheta}\sin\vartheta)]$

D3. *Trovare la torsione τ della curva*

$$P-O=t^2\boldsymbol{e}_x+t(t^2-1)\boldsymbol{e}_y-2(t^3+2\sinh t)\boldsymbol{e}_z$$

nell'origine O.

{5,-1,0}

Soluzione
◯ $\tau=\frac{15}{13}$ ◯ $\tau=2$ ◯ $\tau=\frac{8}{39}$ ◯ $\tau=\frac{5}{4}$ ◯ $\tau=\frac{30}{37}$ ◯ $\tau=1$ ◯ $\tau=\frac{20}{17}$ ◯ $\tau=\frac{5}{2}$

D4. *Si consideri il seguente sistema di vettori applicati:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{e}_x+4\boldsymbol{e}_y & \text{applicato in } P_1-O\equiv(2,0), \\ \boldsymbol{v}_2=-3\boldsymbol{e}_x+2\boldsymbol{e}_y & \text{applicato in } P_2-O\equiv(0,1), \\ \boldsymbol{v}_3=\beta\boldsymbol{e}_x-\boldsymbol{e}_y & \text{applicato in } P_3-O\equiv(0,3). \end{cases}$$

Trovare per quale valore di β l'asse centrale ha la direzione della retta $y=x$.

{5,-1,0}

Soluzione
◯ $\beta=2$ ◯ $\beta=3$ ◯ $\beta=4$ ◯ $\beta=5$ ◯ $\beta=6$ ◯ $\beta=7$ ◯ $\beta=8$ ◯ $\beta=9$

ESERCIZI

E1. *In un piano verticale, un disco omogeneo di massa $2m$ e raggio r è sospeso in un punto P posto sulla sua periferia tramite una cerniera fissa; un punto materiale di massa $3m$ è vincolato a muoversi lungo una scanalatura diametrale dello stesso disco, passante per P, ed è attratto verso il centro del disco da una molla di costante elastica $k=\frac{mg}{r}$, e lunghezza a riposo nulla (Figura 5). Determinare la massima frequenza delle piccole oscillazioni in un intorno della configurazione di equilibrio stabile.*

{5,-1,0}

Risposta
◯ $\sqrt{\frac{2g}{3r}}$ ◯ $\sqrt{\frac{2g}{r}}$ ◯ $\sqrt{\frac{14g}{39r}}$ ◯ $\sqrt{\frac{g}{2r}}$ ◯ $\sqrt{\frac{14g}{51r}}$ ◯ $\sqrt{\frac{g}{3r}}$ ◯ $\sqrt{\frac{42g}{59r}}$ ◯ $\sqrt{\frac{3g}{r}}$

E2. *Una verga euleriana rettilinea di lunghezza ℓ è caricata da una distribuzione uniforme di forze con densità lineare $-2p\boldsymbol{e}_y$ (Figura 6). L'estremo O è incastrato, mentre nell'estremo B è applicata una coppia concentrata di momento $-3p\ell^2\boldsymbol{e}_z$. Se la rigidezza flessionale della verga (coefficiente di proporzionalità tra curvatura e momento flettente) è $A=p\ell^3$, qual è il profilo di equilibrio della verga, nell'ipotesi di piccole deflessioni dalla configurazione indeformata?*

{5,-1,0}

Soluzione
◯ $y(x)=\frac{x^2}{\ell^2}\ell[-2+\frac{1}{3}\frac{x}{\ell}-\frac{1}{12}\frac{x^2}{\ell^2}]$ ◯ $y(x)=\frac{x^2}{\ell^2}\ell[-\frac{5}{4}+\frac{1}{6}\frac{x}{\ell}-\frac{1}{24}\frac{x^2}{\ell^2}]$
◯ $y(x)=\frac{x^2}{\ell^2}\ell[-\frac{5}{2}+\frac{2}{3}\frac{x}{\ell}-\frac{1}{6}\frac{x^2}{\ell^2}]$ ◯ $y(x)=\frac{x^2}{\ell^2}\ell[-\frac{7}{4}+\frac{1}{2}\frac{x}{\ell}-\frac{1}{8}\frac{x^2}{\ell^2}]$

◯ $y(x) = \frac{x^2}{\ell^2}\ell[-\frac{5}{2} + \frac{1}{3}\frac{x}{\ell} - \frac{1}{12}\frac{x^2}{\ell^2}]$ ◯ $y(x) = \frac{x^2}{\ell^2}\ell[-\frac{7}{4} + \frac{1}{6}\frac{x}{\ell} - \frac{1}{24}\frac{x^2}{\ell^2}]$

◯ $y(x) = \frac{x^2}{\ell^2}\ell[-3 + \frac{2}{3}\frac{x}{\ell} - \frac{1}{6}\frac{x^2}{\ell^2}]$ ◯ $y(x) = \frac{x^2}{\ell^2}\ell[-\frac{9}{4} + \frac{1}{2}\frac{x}{\ell} - \frac{1}{8}\frac{x^2}{\ell^2}]$

E3. *Un'asta rigida AB di lunghezza ℓ e massa trascurabile è inclinata sulla verticale di un angolo α tale che $\cos\alpha = \frac{3}{5}$. L'asta è vincolata nell'estremo A da una cerniera cilindrica e in B da un carrello bilatero (Figura 4); su di essa agisce una coppia di momento $2p\ell\boldsymbol{e}_z$. Determinare il valore assoluto dello sforzo assiale N nel punto medio di AB.*

{5,-1,0}

Risposta

◯ $N = \frac{8}{3}p$ ◯ $N = \frac{12}{5}p$ ◯ $N = \frac{45}{8}p$ ◯ $N = \frac{5}{4}p$

◯ $N = \frac{3}{2}p$ ◯ $N = \frac{5}{12}p$ ◯ $N = \frac{8}{5}p$ ◯ $N = \frac{36}{5}p$

E4. *In un piano verticale, un'asta di massa m e lunghezza ℓ ha un estremo B incernierato sul pianale di un carrello, e l'altro estremo A appoggiato a una parete verticale di quest'ultimo, in modo che l'angolo fra l'asta e l'orizzontale sia $\vartheta = \frac{\pi}{6}$ (Figura 3). A partire da un dato istante, il carrello inizia a muoversi di moto armonico $x(t) = \alpha\ell\cos\omega t$. Qual è il valore limite di α compatibile con il contatto dell'asta in A durante un'oscillazione completa del carrello?*

{5,-1,0}

Risposta

◯ $\alpha = \frac{\sqrt{3}g}{3\omega^2\ell}$ ◯ $\alpha = \frac{\sqrt{3}g}{27\omega^2\ell}$ ◯ $\alpha = \frac{\sqrt{3}g}{12\omega^2\ell}$ ◯ $\alpha = \frac{\sqrt{3}g}{48\omega^2\ell}$

◯ $\alpha = \frac{\sqrt{3}g}{16\omega^2\ell}$ ◯ $\alpha = \frac{\sqrt{3}g}{\omega^2\ell}$ ◯ $\alpha = \frac{\sqrt{3}g}{4\omega^2\ell}$ ◯ $\alpha = \frac{4\sqrt{3}g}{3\omega^2\ell}$

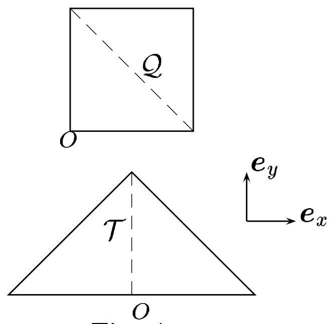

Fig. 1

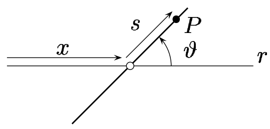

Fig.2

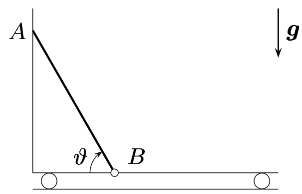

Fig.3

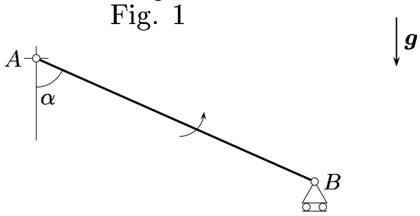

Fig.4

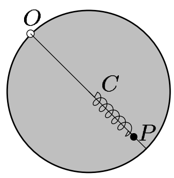

Fig.5

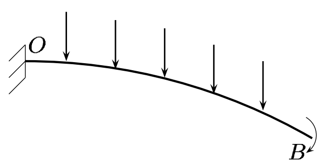

Fig.6