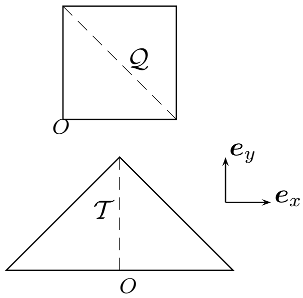
Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Esame di Meccanica Razionale
Appello del 5 settembre 2002
Soluzioni

D1. *Una lamina quadrata omogenea $\mathcal{Q}$ di massa $2m$ e lato di lunghezza ℓ viene divisa in due lungo una diagonale ed i triangoli così ottenuti vengono disposti in modo da formare un triangolo $\mathcal{T}$. Detti $I_O(\mathcal{Q})$ ed $I_O(\mathcal{T})$ i rispettivi momenti di inerzia rispetto ad un asse passante per O e diretto lungo $\boldsymbol{e}_z$, quanto vale la differenza $\Delta := I_O(\mathcal{Q}) - I_O(\mathcal{T})$?*



Il momento centrale di inerzia di $\mathcal{Q}$ rispetto ad un asse diretto lungo $\boldsymbol{e}_z$ è $I_C^z = \frac{m\ell^2}{3}$ e dunque, grazie grazie al teorema di HUYGENS-STEINER,

$$I_O(\mathcal{Q}) = I_C^z + m\ell^2 = \frac{4m\ell^2}{3}.$$

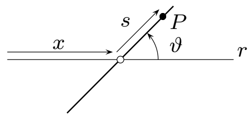
Quanto a $\mathcal{T}$, esso equivale a metà di un quadrato $\mathcal{Q}'$ di lato $\ell\sqrt{2}$, massa $4m$, avente O come centro di massa. Dunque

$$I_O(\mathcal{T}) = \frac{1}{2} I_O(\mathcal{Q}') = \frac{2}{3} m\ell^2$$

e

$$\Delta = \frac{2}{3} m\ell^2 .$$

D2. *In un piano, un'asta omogenea di lunghezza ℓ e massa $2m$ ha il centro vincolato a muoversi lungo una retta r. Sull'asta scorre un punto materiale P di massa $2m$. Calcolare l'energia cinetica del sistema in funzione delle coordinate lagrangiane x, s e ϑ indicate in Figura.*



L'energia cinetica consta di due contributi, uno dovuto all'asta, l'altro al punto materiale P. Per il primo è sufficiente applicare il teorema di König per ottenere

$$T_a = m\dot{x}^2 + \frac{m}{12}\ell^2\dot{\vartheta}^2 .$$

Per ricavare il contributo di P è sufficiente derivare rispetto al tempo il suo vettore posizione

$$(x + s\cos\vartheta)\boldsymbol{e}_x + s\sin\vartheta\boldsymbol{e}_y$$

per avere l'espressione della velocità

$$\boldsymbol{v} = [\dot{x} + \dot{s}\cos\vartheta - s\dot{\vartheta}\sin\vartheta]\boldsymbol{e}_x + [\dot{s}\sin\vartheta + s\dot{\vartheta}\sin\vartheta]\boldsymbol{e}_y$$

e quindi risalire a

$$T_P = mv_P^2 = m[\dot{x}^2 + \dot{s}^2 + s^2\dot{\vartheta}^2 + 2\dot{x}(\dot{s}\cos\vartheta - s\dot{\vartheta}\sin\vartheta)] .$$

In conclusione, l'energia cinetica complessiva è

$$T = m[2\dot{x}^2 + \dot{s}^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{6}\ell^2 + s^2)\dot{\vartheta}^2 + 2\dot{x}(\dot{s}\cos\vartheta - s\dot{\vartheta}\sin\vartheta)] .$$

D3. *Trovare la torsione τ della curva*

$$P - O = t^2\boldsymbol{e}_x + t(t^2-1)\boldsymbol{e}_y - 2(t^3 + 2\sinh t)\boldsymbol{e}_z$$

nell'origine O.
La torsione τ della curva si ricava dalla formula

$$\tau = -\frac{P' \wedge P'' \cdot P'''}{|P' \wedge P''|^2} .$$

Nel nostro caso, in $t = 0$ abbiamo

$$P'(0) = -\boldsymbol{e}_y - 4\boldsymbol{e}_z \quad P''(0) = 2\boldsymbol{e}_x \quad P'''(0) = 6\boldsymbol{e}_y - 16\boldsymbol{e}_z$$

da cui ricaviamo che $P'(0) \wedge P''(0) = 2(\boldsymbol{e}_z - 4\boldsymbol{e}_y)$ e dunque

$$\tau(0) = \frac{20}{17} .$$

D4. *Si consideri il seguente sistema di vettori applicati:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{e}_x + 4\boldsymbol{e}_y & \textit{applicato in } P_1 - O \equiv (2,0), \\ \boldsymbol{v}_2 = -3\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y & \textit{applicato in } P_2 - O \equiv (0,1), \\ \boldsymbol{v}_3 = \beta\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y & \textit{applicato in } P_3 - O \equiv (0,3). \end{cases}$$

Trovare per quale valore di β l'asse centrale ha la direzione della retta $y = x$.
Il risultante del sistema è

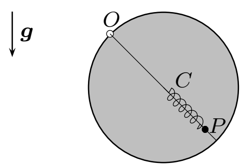
$$\boldsymbol{R} = (\beta - 2)\boldsymbol{e}_x + 5\boldsymbol{e}_y\,;$$

poiché l'asse centrale ha la direzione di $\boldsymbol{R}$ e vogliamo che sia anche parallelo alla retta $y = x$, dobbiamo imporre che

$$\beta - 2 = 5\,,$$

cioè $\beta = 7$.

E1. *In un piano verticale, un disco omogeneo di massa m e raggio r è sospeso in un punto O posto sulla sua periferia tramite una cerniera fissa; un punto materiale di massa m è vincolato a muoversi lungo una scanalatura diametrale dello stesso disco, passante per P, ed è attratto verso il centro del disco da una molla di costante elastica $k = \frac{3mg}{r}$ e lunghezza a riposo nulla. Determinare la massima frequenza delle piccole oscillazioni in un intorno della configurazione di equilibrio stabile.*



Occorrono due coordinate lagrangiane per individuare la posizione del sistema: ad esempio, l'angolo ϑ che il raggio OC forma con la verticale e l'ascissa s di P lungo il diametro su cui è vincolato, valutata partendo da C e ritenuta positiva quando C è tra P ed O. In questo modo, l'energia potenziale delle forze attive, tutte conservative, è

$$V = -mgr\cos\vartheta - mg(r+s)\cos\vartheta + \frac{mg}{2r}s^2$$

e le posizioni di equilibrio si ricavano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} V_s = -mg\cos\vartheta + \frac{3mgs}{r} = 0 \\ V_\vartheta = mg[2r+s]\sin\vartheta = 0. \end{cases}$$

Visto che $s \in [-r, r]$, la seconda equazione ha come soluzioni accettabili quelle tali che $\sin\vartheta = 0$, cioè $\vartheta = 0$ oppure $\vartheta = \pi$ cui corrispondono, rispettivamente, i valori $s = \pm\frac{r}{3}$. La matrice hessiana B di V ha elementi

$$\begin{aligned} V_{ss} &= \tfrac{3mg}{r} \\ V_{s\vartheta} &= mg\sin\vartheta \\ V_{\vartheta\vartheta} &= mg(2r+s)\cos\vartheta \end{aligned}$$

da cui si desume che solo $\vartheta = 0$, $s = \frac{r}{3}$ è stabile e

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \frac{3mg}{r} & 0 \\ 0 & \frac{7mg}{3} \end{pmatrix}$$

L'energia cinetica del disco è $T_d = \frac{3m}{4}r^2\dot\vartheta^2$ mentre quella T_P del punto materiale P si ricava seguendo un procedimento analogo a quello seguito nella domanda **D2**:

$$T_P = \frac{m}{2}[(r+s)^2\dot\vartheta^2 + \dot s^2]$$

per cui, in definitiva

$$T == \frac{3m}{4}r^2\dot\vartheta^2 + \frac{m}{2}[(r+s)^2\dot\vartheta^2 + \dot s^2]$$

e la forma quadratica A in corrispondenza della configurazione di equilibrio diventa

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{mr^2}{2}(3+\frac{32}{9}) \end{pmatrix}.$$

Sia A che B sono diagonali ed il calcolo delle frequenze delle piccole oscillazioni risulta immediato

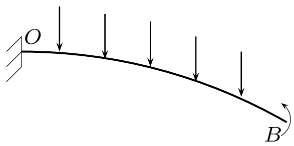
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3g}{r}} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{42g}{59r}}:$$

la massima frequenza è $\omega_1 = \sqrt{\frac{3g}{r}}$.

E2. *Una verga euleriana rettilinea di lunghezza ℓ è caricata da una distribuzione uniforme di forze con densità lineare $-2p\boldsymbol{e}_y$. L'estremo O è incastrato, mentre nell'estremo B è applicata una coppia concentrata di momento $-3p\ell^2\boldsymbol{e}_z$. Se la rigidezza flessionale della verga (coefficiente di proporzionalità tra curvatura e momento flettente) è $A = p\ell^3$, qual è il profilo di equilibrio della verga, nell'ipotesi di piccole deflessioni dalla configurazione indeformata?*

Sia s l'ascissa curvilinea della verga, misurata partendo da O. Il versore tangente $\boldsymbol{t}$ si esprime come

$$\boldsymbol{t} = \cos\vartheta(s)\boldsymbol{e}_x - \sin\vartheta(s)\boldsymbol{e}_y = x'(s)\boldsymbol{e}_x + y'(s)\boldsymbol{e}_y, \tag{1}$$



dove le coordinate (x, y) sono riferite al punto O, come indicato nella seconda figura, mentre un apice indica la derivazione rispetto ad s. Le equazioni di equilibrio per la verga sono

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Phi}' + \boldsymbol{f} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\Gamma}' + \boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{g} = \mathbf{0} \end{cases}$$

dove $\boldsymbol{\Phi}$ è lo sforzo interno all'asta e Γ il momento flettente, mentre $\boldsymbol{f}$ è la densità di carico distribuita e $\mathbf{g}$ la densità di coppia distribuita. L'ipotesi di verga euleriana si traduce nella relazione

$$\boldsymbol{\Gamma} = Ac\boldsymbol{b} \tag{2}$$

che lega il momento flettente alla curvatura $c = \vartheta'$ della verga. Nel caso in esame dove $\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{e}_z$, $\mathbf{f} = -2p\boldsymbol{e}_y$ e $\boldsymbol{g} = \mathbf{0}$, le equazioni di equilibrio sono

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Phi}' = 2p\boldsymbol{e}_y \\ -A\vartheta''\boldsymbol{e}_z + \boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Ricorriamo subito all'ipotesi di piccole deflessioni dalla configurazione indeformata imponendo $|\vartheta(s)| \ll 1$. Riscrivendo (1) nell'approssimazione adottata, abbiamo $x'(s) = 1$ e $y'(s) = -\vartheta(s)$. Integrando $x'(s) = 1$ otteniamo $x = s$: possiamo cioè confondere l'ascissa curvilinea s con la variabile x e le derivate rispetto ad s con quelle rispetto ad x.

Dalla prima equazione di equilibrio segue $\Phi(x) = 2px\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{k}$, con $\boldsymbol{k}$ vettore costante. Poiché l'estremo B non è soggetto ad un carico concentrato abbiamo $\Phi(\ell) = \mathbf{0}$ e dunque

$$\Phi(x) = 2p(x - \ell)\boldsymbol{e}_y\,,$$

che, sostituito nella seconda equazione di equilibrio dà

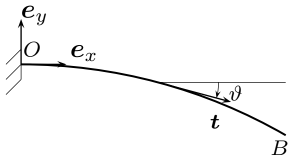
$$-A\vartheta'' + 2p(x - \ell) = 0$$

ovvero, considerando il legame tra ϑ ed y

$$p\ell^3 y'''(x) + 2p(x - \ell) = 0\,.$$

Integriamo ora tre volte quest'equazione, indicando con a_1, a_2 ed a_3 le costanti di integrazioni ottenute nei singoli passaggi; abbiamo

$$y(x) = -\frac{2}{\ell^3}[\frac{x^4}{24} - \ell\frac{x^3}{6}] + a_1x^2 + a_2x + a_3\,.$$



Per determinare le costanti di integrazione, serviamoci delle condizioni al contorno. In O deve essere $y(0) = 0$ ed $y'(0) = -\vartheta'(0) = 0$, dal momento che l'asta parte con tangente orizzontale: dunque, abbiamo $a_3 = 0$ ed $a_2 = 0$. Infine, in B è applicata una coppia concentrata per cui

$$\boldsymbol{\Gamma}(\ell) = -3p\ell^2 \boldsymbol{e}_z$$

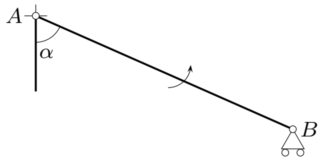
o, servendoci dell'ipotesi costitutiva (2),

$$y''(\ell) = -\vartheta'(\ell) = -\frac{3}{\ell}$$

e così abbiamo $a_1 = -\frac{2}{\ell}$ e l'equazione cartesiana del profilo dell'asta è

$$y(x) = \ell \left(\frac{x}{\ell}\right)^2 \left[-\frac{x^2}{12} + \ell\frac{x}{3} - 2\right] .$$

E3. *Un'asta rigida AB di lunghezza ℓ e massa trascurabile è inclinata sulla verticale di un angolo α tale che $\cos\alpha = \frac{3}{5}$. L'asta è vincolata nell'estremo A da una cerniera cilindrica e in B da un carrello bilatero e su di essa agisce una coppia di momento $2p\ell\boldsymbol{e}_z$. Determinare il valore assoluto dello sforzo assiale N nel punto medio di AB.*



Posto $\boldsymbol{\Phi}_B = \Phi_B \boldsymbol{e}_y$, l'equilibrio dei momenti in A impone

$$\Phi_B = -\frac{2p}{\sin\alpha} = -\frac{5p}{2} .$$

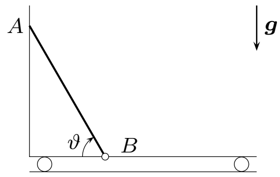
Se l'asta viene spezzata nel punto medio C e si richiede l'equilibrio delle forze agenti su BC, si ottiene

$$\boldsymbol{T} = \frac{5p}{2}\boldsymbol{e}_y$$

dove $\boldsymbol{T}$ è lo sforzo interno in C. Proiettando lungo la tangente all'asta ricaviamo

$$N = \frac{3}{2}p\,.$$

E4. *In un piano verticale, un'asta di massa m e lunghezza ℓ ha un estremo B incernierato sul pianale di un carrello, e l'altro estremo A appoggiato a una parete verticale di quest'ultimo, in modo che l'angolo fra l'asta e l'orizzontale sia $\vartheta = \frac{\pi}{6}$. A partire da un dato istante, il carrello inizia a muoversi di moto armonico $x(t) = \alpha\ell\cos\omega t$. Qual è il valore limite di α compatibile con il contatto dell'asta in A durante un'oscillazione completa del carrello?*



Poniamoci nel sistema di riferimento che trasla con il carrello. Il contatto dell'asta con la parete verticale è garantito finché la reazione vincolare $\boldsymbol{\Phi}_A = \Phi_A \boldsymbol{e}_x$ è tale che $\Phi_A \geq 0$. La presenza del contatto consente di studiare il problema con i metodi della statica relativa, aggiungendo alle forze vincolari ed al peso, la forza fittizia $\boldsymbol{f}_a = -m\ddot{x}$, applicata nel centro di massa dell'asta. L'equilibrio dei momenti rispetto al polo B impone

$$-\frac{\Phi_A}{2} + \frac{mg\sqrt{3}}{4} + \frac{m\ddot{x}}{4} = 0$$

e la condizione $\Phi_A \geq 0$ diventa

$$g\sqrt{3} \geq \omega^2\alpha\ell\cos\omega t$$

che è verificata $\forall t$ a patto di scegliere

$$\alpha \leq \frac{g\sqrt{3}}{\omega^2\ell}.$$

Il massimo valore di α compatibile con il contatto durante l'intera oscillazione del carrello è

$$\alpha = \frac{g\sqrt{3}}{\omega^2\ell}.$$