Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Esame di Meccanica Razionale
Appello del 6 febbraio 2004
Soluzioni: parte I

Q1. *Si consideri il seguente sistema di vettori applicati:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{e}_x - 2\boldsymbol{e}_y + 2\boldsymbol{e}_z & \textit{applicato in } P_1 - O \equiv (1,0,0), \\ \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y & \textit{applicato in } P_2 - O \equiv (1,0,1), \\ \boldsymbol{v}_3 = -\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_z & \textit{applicato in } P_3 - O \equiv (0,\beta,0). \end{cases}$$

Calcolare per quale valore di β il trinomio invariante assume il valore 4

Il risultante del sistema è

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y \ + 4\boldsymbol{e}_z\,, \tag{1}$$

e il momento totale rispetto all'origine è, invece:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_O =& (\boldsymbol{e}_x) \wedge (\boldsymbol{e}_x - 2\boldsymbol{e}_y + 2\boldsymbol{e}_z) + \\ & (\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_z) \wedge (\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y) + \\ & (\beta\boldsymbol{e}_y) \wedge (-\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_z) \\ =& (2\beta - 1)\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y + (\beta - 1)\boldsymbol{e}_z\,. \end{aligned} \tag{2}$$

A questo punto, non resta che calcolare il trinomio invariante $\mathcal{I}$ ...

$$\mathcal{I} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{M}_O = (2\beta - 1) + (-1)(-1) + (\beta - 1)(4) = 6\beta - 4 \tag{3}$$

...e imporre $\mathcal{I} = 4$ per ottenere

$$\beta = \frac{4}{3}\,. \tag{4}$$

Q2. *L'atto di moto di un corpo rigido $\mathcal{B}$ di massa M è caratterizzato dalla velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ e dalla velocità $\boldsymbol{v}_G$ del centro di massa G di $\mathcal{B}$. Preso un punto $O \in \mathcal{B}$ diverso da G e detti $\mathbb{I}_G$ e $\mathbb{I}_O$ i tensori di inerzia di $\mathcal{B}$ rispetto ad O e a G, quale tra le seguenti espressioni del momento della quantità di moto rispetto ad O è corretta, qualunque sia l'atto di moto di $\mathcal{B}$?*

1. $\boldsymbol{K}_O = \mathbb{I}_O\boldsymbol{\omega}$
2. $\boldsymbol{K}_O = \mathbb{I}_G\boldsymbol{\omega}$
3. $\boldsymbol{K}_O = M(G - O) \wedge \boldsymbol{v}_G$
4. $\boldsymbol{K}_O = \boldsymbol{K}_G + M(G - O) \wedge \boldsymbol{v}_G$
5. $\boldsymbol{K}_O = \mathbb{I}_O\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\omega}$

6. $\boldsymbol{K}_O = \frac{1}{2}v_G^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbb{I}_G\boldsymbol{\omega}$

7. *Nessuna delle precedenti*

La risposta corretta è la (4):

$$\boldsymbol{K}_O = \boldsymbol{K}_G + M(G-O)\wedge\boldsymbol{v}_G\,, \tag{5}$$

che esprime il teorema del trasporto per i momenti delle quantità di moto nel caso generale (basta spostare il fattore scalare M nel secondo membro del prodotto vettoriale per riconoscere nel termine $M\boldsymbol{v}_G$ la quantità di moto totale).

Vediamo rapidamente perché le altre possibili risposte sono comunque sbagliate. La formula (1) è valida se il punto O ha velocità nulla, cosa che, in generale, non è verificata; la (2) sarebbe corretta per $G \equiv O$, che è esplicitamente escluso dal testo; la (3) è valida nel caso particolare che sia $\boldsymbol{K}_G = 0$, ossia per $\boldsymbol{\omega} = 0$ (atto di moto traslatorio). Le (5) e (6) non rispettano neanche l'omogeneità delle dimensioni fisiche (e la seconda, neanche quella vettoriale: il secondo membro è uno scalare, precisamente l'energia cinetica scritta utilizzando il teorema di König. Avendo trovato la risposta corretta, pertanto, la (7) non è accettabile.

Q3. *In un piano verticale, un disco omogneo di massa m e raggio R è libero di ruotare senza attrito attorno ad un punto fisso O della sua circonferenza. Un punto materiale di massa $\frac{m}{2}$ può scorrere senza attrito su una guida orizzontale passante per O ed è attirato da una molla di costante elasticca $\frac{mg}{6R}$ e lunghezza a riposo nulla verso il punto Q del disco, diametralmente opposto ad O (Figura 1). Trovare le frequenze delle piccole oscillazioni in un intorno della posizione di equilibrio $x = 0$, $\vartheta = 0$.*

Si tratta di un problema di modi normali, che affronteremo nella maniera tradizionale. Il sistema due gradi di libertà: possiamo associarli alle coordinate lagrangiane corrispondenti all'ascissa x di P lungo la direzione $\boldsymbol{e}_x$, misurata a partire da O e all'angolo ϑ che il diametro OQ forma con la direzione $\boldsymbol{e}_x$ (si veda la figura sottostante per il dettaglio).

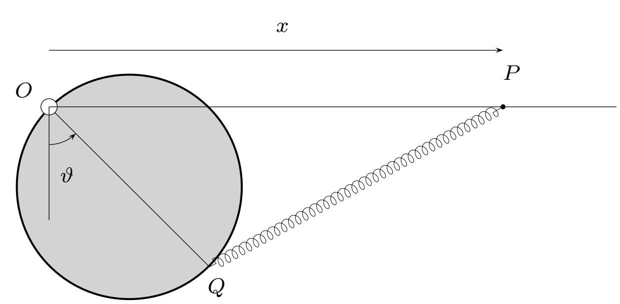

Fig. 1

Scriviamo, anzitutto, l'energia potenziale V del sistema in funzione delle coordinate lagrangiane introdotte; per fare ciò, osserviamo come la quota del punto P sia costante, pertanto il corripsondente contributo a V possa essere considerato nullo:

$$\begin{aligned} V(x,\vartheta) &= -mgr\cos\vartheta + \frac{1}{2}\frac{mg}{6R}\left[(2R\sin\vartheta - x)^2 + 4R^2\cos^2\vartheta\right] \\ &= -mgr\cos\vartheta + \frac{mg}{12R}(4R^2 + x^2 - 4Rx\sin\vartheta)\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Le configurazioni di equilibrio si trovano annullando il gradiente di $V(x,\vartheta)$:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{mg}{6R}x - \frac{mg}{3R}\sin\vartheta = 0 \tag{7a}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \vartheta} = mgR\sin\vartheta - \frac{mg}{3R}Rx\cos\vartheta = 0\,; \tag{7b}$$

con $x = 0$, otteniamo, dalla (7b) che i valori possibili di ϑ all'equilibrio, in questo caso, sono:

$$\vartheta = 0\,, \quad \pi\,. \tag{8}$$

L'energia cinetica complessiva T si ottiene immediatamente, osservando che la velocità $\boldsymbol{v}_P$ del punto P è $\boldsymbol{v}_P = \dot{x}\boldsymbol{e}_x$, e che il punto O è fisso, quindi:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I_O\dot{\vartheta}^2 \\ &= \frac{1}{4}m\dot{x}^2 + \frac{3}{4}mR^2\dot{\vartheta}^2\,, \end{aligned} \tag{9}$$

dove I_O è il momento d'inerzia calcolato nel punto O rispetto alla direzione perpendicolare al piano del sistema, utilizzando la formula di Huygens-Steiner.

Per trovare le pulsazioni dei modi normali, dobbiamo procedere alla diagonalizzazione simultanea delle forme quadratiche associate alle matrici A e B i cui elementi sono così definiti, rispettivamente:

$$A_{ij} = \left.\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}_i\partial\dot{q}_j}\right|_{q=q_0} \tag{10a}$$

$$B_{ij} = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_i\partial q_j}\right|_{q=q_0} \tag{10b}$$

dove, per brevità, abbiamo posto $q := (q_1, q_2) := (x, \vartheta)$, e q_0 indica la configurazione di equilibrio. La matrice A risulta essere già diagonale, mentre per B troviamo anche elementi fuori diagonale; ponendo $q_0 = (0,0)$, che è la configurazione richiesta dal testo, otteniamo:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}m & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}mR^2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{mg}{4R} & -\frac{1}{3}mg \\ -\frac{1}{3}mg & mgR\,. \end{pmatrix} \tag{11}$$

Anzitutto, notiamo che la matrice hessiana dell'energia potenziale (11) ha determinante

$$\det(B) = (\frac{1}{4} - \frac{1}{9})(mg)^2 = \frac{5}{36}(mg)^2 > 0\,, \tag{12}$$

e che $B_{11} > 0$: quindi, la forma quadratica associata per V è definita positiva, cosa che permette subito di affermare che la configurazione di equilibrio trovata è effettivamente stabile (si noti, invece, che per $q_0 = (0, \pi)$ la configurazione di equilibrio risulta instabile). Risolviamo ora l'equazione caratteristica in λ:

$$\begin{aligned}
\det(B - \lambda A) &= \begin{bmatrix} \frac{mg}{6R} - \frac{\lambda}{2}m & -\frac{1}{3}mg \\ -\frac{1}{3}mg & mgR - \lambda\frac{3}{2}mR^2 \end{bmatrix} \\
&= m^2\left(\frac{g}{6R} - \frac{\lambda}{2}\right)\left(gR - \frac{3\lambda}{2}R^2\right) - \frac{1}{9}m^2g^2 \\
&= m^2\left(\frac{1}{6}g^2 - \frac{3}{4}\lambda gR + \frac{3}{4}\lambda^2R^2\right) - \frac{1}{9}m^2g^2 = 0\,,
\end{aligned} \tag{13}$$

ossia, semplificando e ponendo $\tilde{\lambda} := R\lambda/g$ per snellire la notazione,

$$3\tilde{\lambda}^2 - 3\tilde{\lambda} + \frac{2}{9} = 0\,. \tag{14}$$

Ora, le radici della (14) sono:

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - \frac{24}{9}}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{\frac{57}{9}}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{\frac{19}{3}}}{6}\,, \tag{15}$$

e quindi, finalmente, le pulsazioni cercate si ottengono estraendo le radici quadrate delle (15), previa moltiplicazione per il fattore g/R per ottenere le λ originali:

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{g}{R}}\sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{\frac{19}{3}}}{6}}\,. \tag{16}$$

Q4. *Un filo omogeneo AB di lunghezza $\frac{\pi R}{2}$ e densità lineare di massa $\frac{3p}{g}$ è appoggiato senza attrito su di un supporto semicircolare di raggio R. Il filo è vincolato in A al supporto, mentre l'estremo B è soggetto ad una forza elastica di costante βp che lo richiama verso un punto O fisso posto sulla verticale per B a distanza R (Figura 2). Se, in presenza di gravità, il sistema trasla con accelerazione costante $\boldsymbol{a} = -3g\boldsymbol{e}_x$, qual è il minimo valore di β compatibile con il contatto fra disco e filo?*

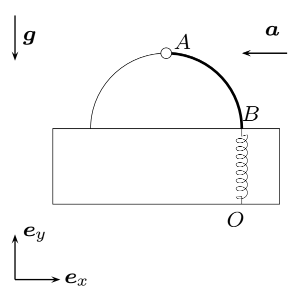

Fig. 2

Anzitutto, conviene mettersi nel riferimento non inerziale che trasla con l'accelerazione $\boldsymbol{a}$ del sistema; in tal caso, oltre alla forza peso distribuita $\boldsymbol{f}_p = -\lambda g\boldsymbol{e}_y$, occorrerà considerare la forza apparente $\boldsymbol{f}_a$ che agisce sul filo, che risulta avere densità lineare

$$\boldsymbol{f}_a = -\lambda\boldsymbol{a} = 9p\boldsymbol{e}_x\,, \tag{17}$$

dove λ è la densità lineare di massa del filo.

Possiamo parametrizzare la curva che descrive il filo attraverso l'angolo ϑ al centro della circonferenza misurato a partire da B fino al punto P generico di AB. Descriveremo quindi la tensione del filo tramite la funzione $\boldsymbol{\tau}(\vartheta)$, con $\vartheta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. in ogni punto P, il versore normale $\boldsymbol{n}$ appare diretto come il raggio della circonferenza, con verso che punta nel centro; la natura del vincolo permette di affermare che la reazione vincolare distribuita ha la forma

$$\boldsymbol{\Phi} = -\Phi_n \boldsymbol{n}\,, \qquad \text{con} \quad \Phi_n \geq 0 \tag{18}$$

(manca cioè la componente tangenziale, in assenza d'attrito, e la reazione normale può essere diretta solo nella maniera descritta, per la condizione di appoggio. La molla in B consente di conoscere la tensione $\boldsymbol{\tau}_B$ nell'estremo del filo: poiché essa deve concidere con la forza applicata si ha:

$$\boldsymbol{\tau}_B = \beta p R \boldsymbol{e}_y\,. \tag{19}$$

La tensione del filo in un punto $P(\vartheta)$ generico può essere ricavata dalla conservazione dell'energia:

$$\tau_P - v_P = \text{costante}\,, \tag{20}$$

avendo indicato con τ_P il modulo di $\boldsymbol{\tau}$ in P e con v_P l'energia potenziale specifica nel punto. Per la valutazione di quest'ultima, possiamo dire che, a meno di costanti additive, se chiamiamo C il centro del disco:

$$v_P = -(P - C) \cdot (\boldsymbol{f}_a + \boldsymbol{f}_p) = 3py_P - 9px_P\,; \tag{21}$$

esprimendo le quantità della (21) in termini di ϑ e sostituendo nella (20) facendo uso della condizione (19), che vale per $\vartheta = 0$, otteniamo la tensione $\tau(\vartheta)$:

$$\tau(\vartheta) = 9pR(1 - \cos\vartheta) + 3pR\sin\vartheta + \beta p\,. \tag{22}$$

L'equazione di equilibrio dei fili, proiettata lungo la direzione normale $\boldsymbol{n}$ si scrive

$$f_n - \Phi_n + \frac{\tau}{R}\,, \tag{23}$$

dove

$$f_n = (\boldsymbol{f}_p + \boldsymbol{f}_a) \cdot \boldsymbol{n} = 3p\sin\vartheta - 9p\cos\vartheta \tag{24}$$

è la proiezione lungo $\boldsymbol{n}$ delle forze distribuite sul filo; esprimendo tutto in funzione di ϑ e risolvendo la (23) in Φ_n otteniamo:

$$\Phi_n(\vartheta) = 6p\sin\theta - 18p\cos\vartheta + 9p + \beta p\,, \tag{25}$$

e, affinché la (18) sia soddisfatta per tutti i punti, basta che lo sia in corrispondenza del minimo di $\Phi_n(\vartheta)$, che si ha, ovviamente, per $\vartheta = 0$: con questa condizione, dalla (25) otteniamo, risolvendo la disequazione (18) in β:

$$\beta \geq 18 - 9 = 9\,, \tag{26}$$

che è la risposta corretta cercata.