

Università di Pavia  
 Facoltà di Ingegneria  
 Esame di Meccanica Razionale  
 Appello del 6 febbraio 2004  
**Soluzioni: parte II**

**Q1.** Trovare la curvatura  $\kappa$  della curva

$$p(t) - O = 3(1 + \cos t)\mathbf{e}_x + \sqrt{2}(1 - \sin t)\mathbf{e}_y + e^t\mathbf{e}_z \quad t \in [0, \pi]$$

nel punto corrispondente a  $t = 0$ .

La curvatura  $\kappa(t)$  è data dalla formula

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{p}(t) \wedge \ddot{p}(t)|}{|\dot{p}(t)|^3}. \quad (1)$$

Calcoliamo le derivate:

$$\dot{p}(t) = -3 \sin t \mathbf{e}_x - \sqrt{2} \cos t \mathbf{e}_y + e^t \mathbf{e}_z \quad (2a)$$

$$\ddot{p}(t) = -3 \cos t \mathbf{e}_x + \sqrt{2} \sin t \mathbf{e}_y + e^t \mathbf{e}_z, \quad (2b)$$

che, nel punto  $t = 0$  assumono i valori

$$\dot{p}(0) = -\sqrt{2}\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \quad (3a)$$

$$\ddot{p}(0) = -3\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z, \quad (3b)$$

e si ha:

$$\dot{p}(0) \wedge \ddot{p}(0) = -\mathbf{e}_x + 2\sqrt{2}\mathbf{e}_y - 2\sqrt{2}\mathbf{e}_z. \quad (4)$$

Sostituendo le (3) e la (4) in (1) otteniamo

$$\sqrt{\frac{17}{27}} \quad (5)$$

**Q2.** Si consideri una lamina omogenea piana di massa  $3m$  avente la forma di un disco di centro  $O$  e raggio  $2\sqrt{3}R$ , posta nel piano dei versori  $\mathbf{e}_x$  ed  $\mathbf{e}_y$  (Figura 1). Calcolare il momento d'inerzia  $I_n$  della lamina nella direzione di un asse passante per  $O$  e diretto come il versore  $\mathbf{n} = \frac{\sqrt{3}}{3}(-\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z)$ .

Anzitutto, ricordiamo che, per calcolare il momento d'inerzia  $I_n$  richiesto, basta considerare il tensore d'inerzia rispetto al punto  $O$  dell'asse e applicare la definizione: si ha, infatti,  $I_n = \mathbf{n} \cdot \mathbb{I}_O \mathbf{n}$ .

Il tensore centrale d'inerzia per il nostro corpo risulta essere:

$$\mathbb{I}_O = \frac{1}{4}(3m)(2\sqrt{3}R)^2(\mathbf{I} + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z) = 9mR^2(\mathbf{I} + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z), \quad (6)$$

e, quindi si ha:

$$\mathbb{I}_O \mathbf{n} = 9mR^2(\mathbf{I} + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z)\mathbf{n} = 9mR^2\left(\mathbf{n} - \frac{\sqrt{3}}{3}\mathbf{e}_z\right). \quad (7)$$

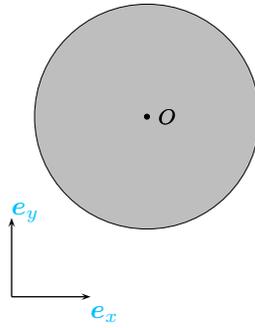


Fig. 1

Dalla (7) è facile ricavare il risultato corretto:

$$I_n = \mathbf{n} \cdot \mathbb{I}_O \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \left[ 9mR^2 \left( \mathbf{n} - \frac{\sqrt{3}}{3} \mathbf{e}_z \right) \right] = 9mR^2 \left( 1 + \frac{1}{3} \right), \quad (8)$$

ossia:

$$I_n = 12mR^2; \quad (9)$$

(nella (8) è stato sfruttato il fatto che, come è immediato verificare,  $\mathbf{n}$  è un versore, e, pertanto,  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$ ).

**Q3.** La struttura rigida riportata in Figura 2 è posta in un piano verticale ed è composta da due aste omogenee rettilinee. L'asta  $OB$ , di massa  $3m$  e lunghezza  $2\sqrt{2}\ell$ , inclinata di  $\frac{\pi}{4}$  sull'orizzontale, è incernierata a terra in  $O$  e vincolata in  $B$  ad una guida verticale grazie a un carrello; l'asta  $AC$ , di massa  $m$  e lunghezza  $\ell$ , disposta orizzontalmente, è incernierata a terra in  $A$  e vincolata in  $C$  da un carrello, posto nel punto medio dell'asta  $OB$ , libero di scorrere lungo essa. Determinare il rapporto  $\gamma$  fra i moduli delle reazioni vincolari in  $B$  e in  $O$ .

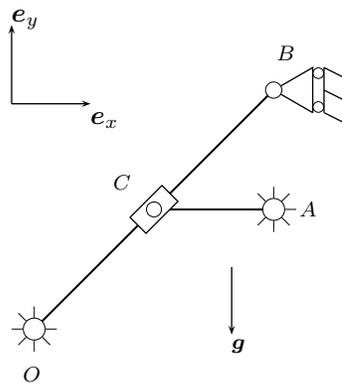


Fig. 2

Cominciamo ad “aprire” la struttura eliminando il carrello in  $C$ ; al suo posto compariranno, in virtù del terzo principio della dinamica, due forze uguali e opposte, applicate sulle due aste e dirette come la perpendicolare alla linea di scorrimento del carrello (che individueremo tramite il versore  $\mathbf{n} := \frac{\sqrt{2}}{2}(-\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y)$ ). Sulla base di quanto detto, possiamo scrivere che sull’asta  $AC$  agisce la reazione vincolare interna  $\Phi_C = \Phi_C \mathbf{n}$ , dove l’introduzione di  $\mathbf{n}$  consente di esplicitare l’unica incognita scalare  $\Phi_C$  (si veda il dettaglio in Figura 2a, dove le aste sono state disegnate separate, per maggiore chiarezza: i vettori  $\Phi_C$  e  $-\Phi_C$  sono infatti sulla stessa retta d’azione, in realtà).

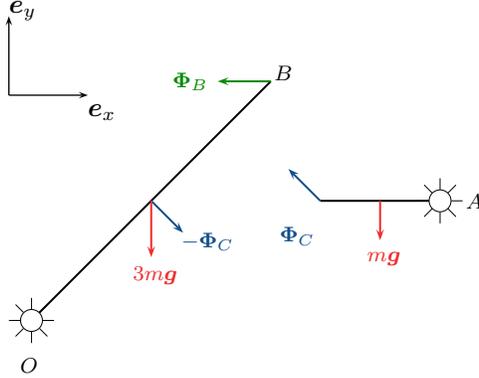


Fig. 2a

Per calcolare  $\Phi_C$ , basta scrivere la seconda equazione cardinale della statica (equilibrio dei momenti) per l’asta  $AC$  scegliendo  $A$  come polo, per non introdurre nuove incognite, e proiettarla nella direzione  $\mathbf{e}_z$ :

$$M_A^{AC} := \mathbf{M}_A^{AC} \cdot \mathbf{e}_z = mg \frac{\ell}{2} - \Phi_C \frac{\sqrt{2}}{2} \ell = 0 \quad (10)$$

da cui ricaviamo

$$\Phi_C = \frac{mg}{\sqrt{2}}. \quad (11)$$

In modo analogo, scrivendo l’equilibrio dei momenti per l’asta  $OB$ , scegliendo  $O$  come polo è immediato ottenere l’incognita scalare associata alla reazione vincolare del carrello in  $B$ : si ha, infatti, ponendo  $\Phi_B = -\Phi_B \mathbf{e}_x$ :

$$M_O^{OB} := \mathbf{M}_O^{OB} \cdot \mathbf{e}_z = 2\ell \Phi_B - 3mg\ell - \frac{mg}{\sqrt{2}} \sqrt{2}\ell = 0, \quad (12)$$

da cui otteniamo:

$$\Phi_B = 2mg. \quad (13)$$

Ora, la prima equazione cardinale della statica per tutta la struttura consente di calcolare la reazione vincolare in  $O$ ,  $\Phi_O = \Phi_{Ox} \mathbf{e}_x + \Phi_{Oy} \mathbf{e}_y$ :

$$\Phi_{Ox} + \Phi_C \frac{\sqrt{2}}{2} - \Phi_B = 0 \quad (14a)$$

$$\Phi_{Oy} - \Phi_C \frac{\sqrt{2}}{2} - 3mg = 0, \quad (14b)$$

ossia

$$\Phi_{Ox} = \frac{3}{2}mg \quad (15a)$$

$$\Phi_{Oy} = \frac{7}{2}mg. \quad (15b)$$

A questo punto, siamo pronti per calcolare la quantità  $\gamma$  richiesta dal testo. Basta ricordare che il modulo di  $\Phi_O$  si ottiene calcolando la somma dei quadrati delle componenti  $\Phi_{Ox}$  e  $\Phi_{Oy}$ , ortogonali fra loro (e NON sommando direttamente le componenti!); scriviamo dunque:

$$|\Phi_O| = \sqrt{(9 + 49)} \frac{mg}{2} = \sqrt{58} \frac{mg}{2} \quad (16a)$$

$$|\Phi_B| = |\Phi_B| = 2mg, \quad (16b)$$

ossia:

$$\gamma = \frac{|\Phi_B|}{|\Phi_O|} = \frac{4}{\sqrt{58}} \quad (17)$$

**Q4.** In un piano, un disco omogeneo di massa  $2m$  e raggio  $R$  può rotolare senza strisciare su una guida rettilinea. Un'asta  $CP$  di massa trascurabile e lunghezza  $2R$  è libera di ruotare attorno all'estremo  $C$ , incernierato nel centro del disco, mentre all'estremo  $P$  reca saldato un punto materiale di massa  $3m$ . Esprimere il momento  $\mathbf{K}_H$  della quantità di moto del sistema rispetto al punto  $H$  di contatto fra la guida e il disco, nella configurazione in cui  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ , e l'atto di moto, espresso nelle coordinate lagrangiane  $x$  e  $\vartheta$  indicate in Figura 3, è generico.

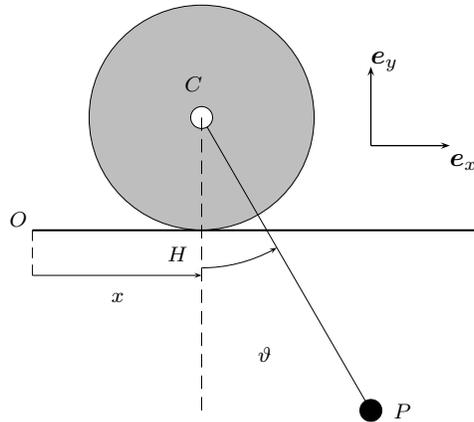


Fig. 3

Una strada percorribile per rispondere correttamente è quella di calcolare esplicitamente le quantità necessarie per soddisfare la richiesta; per fare ciò, iniziamo esprimendo il vettore che individua la posizione del punto P in funzione di  $x$  e  $\vartheta$ :

$$P - O = (x + 2R \sin \vartheta) \mathbf{e}_x - 2R \cos \vartheta \mathbf{e}_y. \quad (18)$$

La (18) permette di scrivere subito la velocità  $\mathbf{v}_P$  del punto:

$$\mathbf{v}_P = \dot{P} = (\dot{x} + 2R\dot{\vartheta} \cos \vartheta) \mathbf{e}_x + 2R\dot{\vartheta} \sin \vartheta \mathbf{e}_y, \quad (19)$$

e, a questo punto, il contributo  $\mathbf{K}_H^P$  di P al momento della quantità di moto totale  $\mathbf{K}_H$  si calcola in base alla definizione:

$$\mathbf{K}_H^P = (P - H) \wedge 3m[(\dot{x} + 2R\dot{\vartheta} \cos \vartheta) \mathbf{e}_x + 2R\dot{\vartheta} \sin \vartheta \mathbf{e}_y]. \quad (20)$$

Nella (20) può risultare utile scrivere  $P - H = (P - C) + (C - H)$ ; si ha, ricordando che si chiede di effettuare il calcolo nelle configurazioni in cui è  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ :

$$\mathbf{K}_H^P = 3m \left[ (2R \sin \vartheta \mathbf{e}_x - 2R \cos \vartheta \mathbf{e}_y) \wedge [(\dot{x} + 2R\dot{\vartheta} \cos \vartheta) \mathbf{e}_x + 2R\dot{\vartheta} \sin \vartheta \mathbf{e}_y] \right] \quad (21)$$

$$+ R \mathbf{e}_y \wedge (\dot{x} + 2R\dot{\vartheta} \cos \vartheta) \mathbf{e}_x \quad (22)$$

$$= 3mR(4R\dot{\vartheta} - \dot{x}) \mathbf{e}_z \quad (23)$$

(nell'ultimo passaggio della (21) si è sostituito il valore della variabile  $\vartheta$  per la configurazione richiesta: naturalmente, avremmo potuto fare questo a partire dalla (19), per snellire i calcoli).

Il secondo contributo  $\mathbf{K}_H^{(d)}$  alla  $\mathbf{K}_H$  è facilmente ottenibile, una volta osservato che  $H$  è il *centro di istantanea rotazione* del disco: possiamo scrivere, quindi:

$$\mathbf{K}_H^{(d)} = \mathbb{I}_H \boldsymbol{\omega}; \quad (24)$$

ora, per la condizione di puro rotolamento abbiamo sicuramente

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{\dot{x}}{R} \mathbf{e}_z, \quad (25)$$

e, indicando con  $I_z$  il momento di inerzia del disco rispetto ad un asse diretto come  $\mathbf{e}_z$  e passante per  $H$ , un corollario del teorema di HUYGENS-STEINER permette di scrivere:

$$I_z = \frac{1}{2} 2mR^2 + (2m)R^2 = 3mR^2. \quad (26)$$

Sostituendo le (25) e (26) nella (24), abbiamo:

$$\mathbf{K}_H^{(d)} = -3mR^2 \frac{\dot{x}}{R} \mathbf{e}_z = -3mR\dot{x} \mathbf{e}_z, \quad (27)$$

e, a questo punto, le (21) e (27) permettono di scrivere subito:

$$\mathbf{K}_H = 3mR(4R\dot{\vartheta} - \dot{x}) \mathbf{e}_z - 3mR\dot{x} \mathbf{e}_z = mR(12R\dot{\vartheta} - 6\dot{x}) \mathbf{e}_z. \quad (28)$$