Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Esame di Meccanica Razionale
Appello dell'8 settembre 2005
Soluzioni (Parte I)

Q1. *Dati i tensori:*

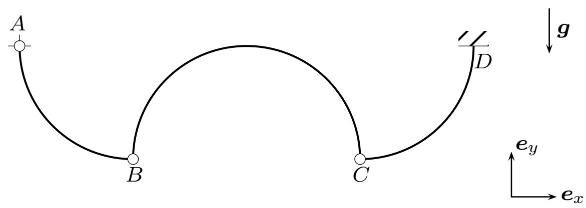
$$\begin{cases} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_y + 2\boldsymbol{e}_y \otimes \boldsymbol{e}_z + 3\boldsymbol{e}_z \otimes \boldsymbol{e}_z \\ \boldsymbol{B} = \beta \boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y \otimes \boldsymbol{e}_z - 4\boldsymbol{e}_z \otimes \boldsymbol{e}_y \end{cases}$$

ed il vettore $\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{e}_x + 4\boldsymbol{e}_y + 3\boldsymbol{e}_z$, *trovare i valori di* β *tali che* $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{B}\boldsymbol{v} > 0$.

Poiché
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = 4\boldsymbol{e}_x + 6\boldsymbol{e}_y + 9\boldsymbol{e}_z$$
e
$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{v} = 3\beta\boldsymbol{e}_x + 6\boldsymbol{e}_y - 16\boldsymbol{e}_z$$
abbiamo
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{B}\boldsymbol{v} = 12\beta - 108 > 0$$
da cui ricaviamo
$$\beta > 9\,.$$

Q2. *La struttura rigida riportata in Figura è composta da tre aste omogenee:*

AB è un quarto di circonferenza di raggio R e peso p; BC è una semicirconferenza di raggio R e peso $2p$ e CD è uguale ad AB ma ha peso trascurabile. La struttura è incernierata a terra in A ed è incastrata in D, mentre in B e C vi sono cerniere interne. Trovare la coppia $\boldsymbol{M}$ e la reazione $\boldsymbol{\Phi}_D$ generate dall'incastro all'equilibrio.



Le incognite da ricavare sono la coppia $\boldsymbol{M} = M\boldsymbol{e}_z$ e la reazione vincolare $\boldsymbol{\Phi}_D = \Phi_{Dx}\boldsymbol{e}_x + \Phi_{Dy}\boldsymbol{e}_y$. L'equilibrio dei momenti rispetto ad A per l'intera struttura impone
$$M + 4\Phi_{Dy}R - 4pR - pR\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) = 0\,,$$
dove gli ultimi due contributi si riferiscono al peso di BC e di AB. Consideriamo ora l'equilibrio dei momenti per BC rispetto al polo B. Applicando il principio

di azione e reazione è possibile vedere che la reazione di cerniera agente su BC in C è pari a $\mathbf{\Phi}_D$. Pertanto, l'equilibrio dei momenti in B richiede

$$2\Phi_{Dy}R - 2pR = 0$$

da cui segue

$$\Phi_{Dy} = p$$

e di conseguenza

$$M = pR\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) .$$

Per trovare Φ_{Dx} richiediamo l'equilibrio dei momenti rispetto a C per l'asta CD, ottenendo

$$pR\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) + pR - \Phi_{Dx}R = 0$$

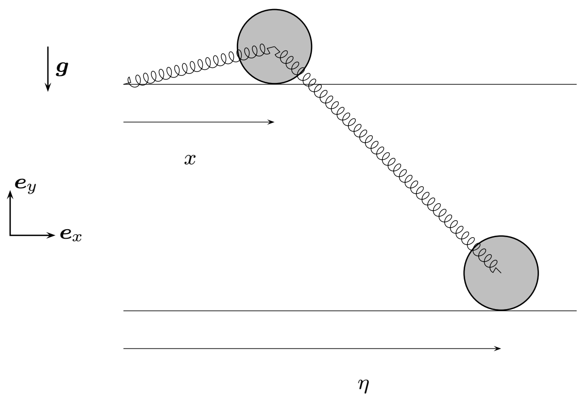
e dunque

$$\Phi_{Dx} = 2p\left(1 - \frac{1}{\pi}\right) .$$

Pertanto,

$$\mathbf{\Phi}_D = 2p\left(1 - \frac{1}{\pi}\right) + p\boldsymbol{e}_y .$$

Q3. *In un piano verticale, due dischi omogenei di ugual raggio R ed ugual massa $3m$ sono vincolati a rotolare senza strisciare su due guide orizzontali distanti tra loro $3R$. Il centro di uno dei dischi è attratto verso un punto fisso della guida su cui rotola da una molla di costante elastica $8k$ e lunghezza a riposo nulla ed attratto verso il centro dell'altro disco da un'ulteriore molla di costante elastica $3k$ e lunghezza a riposo nulla. Trovare le pulsazioni delle piccole oscillazioni in un intorno della posizione di equilibrio stabile.*



Poiché i centri di massa di entrambi i dischi si mantengono a quote fisse durante il moto, possiamo limitarci a considerare l'energia potenziale elastica associata alle molle. Introduciamo le ascisse x ed η dei centri di massa dei due dischi, come indicato in figura. L'energia potenziale diventa allora

$$V = 4k(x^2 + R^2) + \frac{3k}{2}[(x-\eta)^2 + 9R^2]$$

ed annullandone il gradiente otteniamo che le configurazioni di equilibrio debbono soddisfare il sistema

$$\begin{cases} k(11x - 3\eta) = 0 \\ -3k(x-\eta) = 0 \end{cases}$$

da cui si ottiene la sola configurazione $x = \eta = 0$. Per studiarne la stabilità introduciamo la forma hessiana B di V

$$B = \begin{pmatrix} 11k & -3k \\ -3k & 3k \end{pmatrix}$$

da cui emerge la stabilità della configurazione di equilibrio. Poiché l'energia cinetica del sistema, tenuto conto del vincolo di puro rotolamento ed applicando il teorema di Huygens-Steiner, è

$$T = \frac{9m}{4}[\dot{x}^2 + \dot{\eta}^2]$$

la forma quadratica A associata è

$$A = \begin{pmatrix} \frac{9}{2}m & 0 \\ 0 & \frac{9}{2}m \end{pmatrix}.$$

Per trovare le pulsazioni delle piccole oscillazioni, risolviamo l'equazione $\det(\lambda A - B) = 0$ equivalente a

$$\frac{81}{4}m^2\lambda^2 - 63\lambda km + 24k^2 = 0$$

che è risolta da

$$\lambda = \frac{8k}{3m} \qquad \lambda = \frac{4k}{9m}$$

da cui seguono le pulsazioni

$$\omega = \sqrt{\frac{8k}{3m}} \qquad \omega = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Q4. *Quale tra le seguenti affermazioni sulla stabilità di una configurazione di equilibrio $\{q_0\}$ di un sistema soggetto a vincoli olonomi, perfetti ed a forze attive conservative è certamente corretta?*

○ *Se* $\{q_0\}$ *è instabile, non esistono modi oscillanti.*
○ *Se* $\{q_0\}$ *è instabile, tutti i modi normali sono iperbolici.*
○ *Se* $\{q_0\}$ *è stabile, può esistere un modo lineare.*
○ *Se* $\{q_0\}$ *è stabile, possono esistere modi iperbolici, purché in numero minore di quelli oscillanti.*
○ *Se* $\{q_0\}$ *è instabile, esiste almeno un modo che non è oscillante.*
○ *Se* $\{q_0\}$ *è instabile, tutti i modi normali sono lineari.*
○ *Nessuna delle prececenti.*

È sufficiente un modo non oscillante a garantire l'instabilità dell'equilibrio. Pertanto la risposta corretta è

Se $\{q_0\}$ è instabile, esiste almeno un modo che non è oscillante.